



TI-*nspire*[™] CAS

Software version 3.6



Eksempelsamlingen 1. del: Introduktion til værkstederne

TI-*nspire*™ CAS

Eksempelsamlingen 1. del — Introduktion til værkstederne

Copyright © december 2013 by Texas Instruments

Eksempelsamlingen vedligeholdes af

Mette Vedelsby, mette.vedelsby@skolekom.dk

Gert Schomacker, gert.schomacker@skolekom.dk

Bjørn Felsager, bjoern.felsager@skolekom.dk

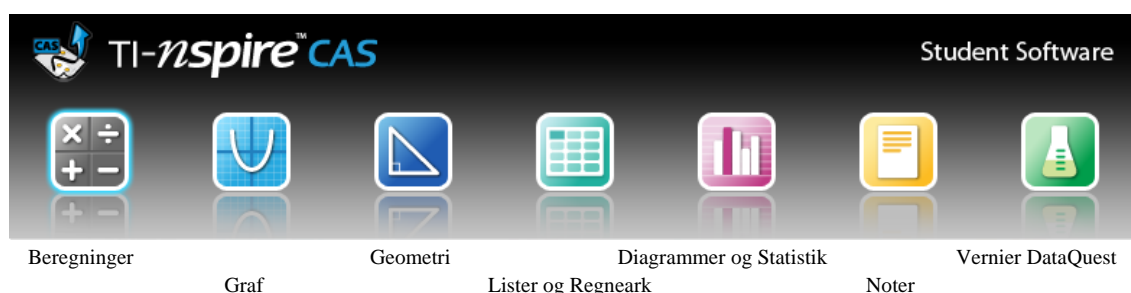
Denne PDF-fil er gratis og må frit bruges til undervisningsformål. Det er herunder tilladt at kopiere og uddele hele eller dele af filen både som fil og på tryk.

I publikationer med copyright, skal kilden nævnes som ”Gengives med tilladelse fra Texas Instruments”.

Filen kan hentes på www.education.ti.com/danmark eller ved henvendelse til Texas Instruments på tlf.: 38 18 19 56 eller email: ti-cares@ti.com.

Introduktion til værktøjerne er tænkt som en første introduktion til matematikprogrammet *TI-nspire™ CAS*, hvor man ved at gennemarbejde eksemplerne bliver fortrolig med såvel de enkelte matematikværktøjer i programmet som den generelle struktur i programmet.

De enkelte værktøjer gennemgås efter tur i samme rækkefølge som de præsenteres på velkomstscreenskærmen:



Man kan dog sagtens uden større besvær læse kapitlerne i en anden rækkefølge. Afhængig af hvilken status lommeregneren har, vil mange for eksempel foretrække at starte med **Noter** og gøre **Noter** til det centrale tekst og beregnings-værktøj fremfor **Beregninger**.

I denne introduktion til matematikværktøjerne kan man selvsagt ikke nå i dybden med de enkelte værktøjer. Mange af værktøjerne er meget omfattende og en samlet gennemgang af fx **graf**-værktøjet ville kræve en lige så omfattende introduktion som den foreliggende til hele programmet. Men introduktionen skulle gøre læseren i stand til at bruge programmet til de mest grundlæggende matematiske undersøgelser. I eksempelsamlingens anden del kommer man mere i dybden med programmets struktur, den underliggende matematik og samspillet mellem de enkelte værktøjer.

Denne eksempelsamling har fokus på programmets anvendelse på computere, hvad enten der er tale om PC med Windows eller MAC-computere. Der er nogle ganske få forskelle på hvordan PC-versionen og MAC-versionen fungerer. Disse vil blive påpeget undervejs.

Programmet kan også anvendes på lommeregerne/håndholdte og ipads. Måden man arbejder med programmet på en lommeregner eller en ipad adskiller sig dog så meget fra computerversionen, at den foreliggende introduktion ikke vil være hensigtsmæssig til disse platforme.

TI-Nspire CAS kan også sættes op i **PublishView**, beregnet på at frembringe almindelige dokumenter, der opbygges i A4-ark. De enkelte værktøjer kan indsættes i et **PublishView**-dokument og måden man arbejder med værktøjerne svarer i det store og hele til den måde man arbejder med værktøjerne i det klassiske **DocumentView** baseret på vinduer, sådan som det gennemgås i det foreliggende hæfte.

Indhold



Velkommen til TI-Nspire CAS.....	6
Opstart af TI-Nspire CAS.....	6
Eksempelvisning og sidestørrelse.....	7
Sidepanelet i TI-Nspire CAS.....	9
1. Værkstedsmenuer.....	10
2. Sidesorteren.....	10
3. TI - Smartview.....	12
4. Hjælpeprogrammer.....	12
5. Indholdsstifinder.....	13
Udskriv.....	14



Beregninger.....	15
Den første lille opgave.....	15
Brøkgregning — regning med eksakte tal.....	17
Regning med bogstaver.....	18
Om at sætte på fælles brøkstreg.....	20
Katalog.....	21
Ligninger og genbrug.....	21
Antal decimaler.....	22







Grafer.....	23
En lille opgave med grafer.....	23
1. Tegn graferne.....	23
2. Spor graferne.....	24
3. Find skæringspunkterne mellem graferne grafisk/symbolsk.....	25
Nyt eksempel og flere grafværktøjer.....	27
1. Manuel indstilling af grafvinduet.....	28
2. Funktionsværdier med Punktværktøj/Beregninger og Tabel.....	29
3. Nulpunktsbestemmelse grafisk/symbolsk.....	32
4. Minimum og maksimum grafisk/symbolsk.....	34
Funktion givet ved en tuborg-forskrift.....	35



Geometriværkstedet.....	37
Geometriske konstruktioner.....	37
Udsmykning i Geometri.....	42
Konstruktion af målfast figur.....	44
En opgave løst i Geometri-værkstedet.....	48



Geometri i Grafer.....	50
Geometri i Grafværkstedet.....	50

Porten i parablen.....	51
Analytisk geometri	54
Skyderobjekter.....	56
 Lister og regneark	59
Regnearket.....	59
Navngivning af søjler	60
Cellerreferencer og celleformler	61
Absolutte cellerreferencer.....	62
 Diagrammer og statistik	64
Indtastning og plot af data	64
Lineær regression	65
Boxplot	65
1. Boxplot fra rådata	65
2. Boxplot efter en hyppighedsliste	67
3. Sammenligning af boxplot	68
χ^2 -test.....	69
1. χ^2 -test for uafhængighed	69
2. χ^2 -test for Goodness of Fit.....	71
3. Terningspil.....	73
 Noter	75
Indtastning af tekst	75
Indtastning af formler	76
Om at rette i formler	77
Samspillet med Beregnings-værkstedet.....	78
En opgave løst i Note-værkstedet.....	79
 Vernier DataQuest™	81
Mit første eksperiment.....	82
Analyse af eksperimentet	82
1. Sporing og markering af vigtige begivenheder	83
2. Hældningen for en punktgraf/tangent.....	83
3. Lineær regression	84
4. Statistik.....	85
5. Beregninger	86
6. Integral.....	86
Gå langs en graf.....	87

O

Velkommen til TI-Nspire CAS

Programmet startes ved at dobbeltklikke på genvejen på Skrivebordet eller ved at vælge noget i retning af

Programmer ▶ TI-Tools ▶ TI-nSpire CAS Student software ...

(hvis du altså har en standardinstallation på en PC – MAC-versionen startes på tilsvarende vis):

Det skærmbillede, du får frem, kan se forskelligt ud afhængig af, hvordan indstillingerne var, sidst programmet blev benyttet.

Obs

Programmet findes i to versioner 'TI-Nspire' og 'TI-Nspire CAS'. Det er afgørende, at du har CAS versionen, med mindre du fx går på et IB-hold, der ikke må bruge CAS.

Opstart af TI-Nspire CAS

Når du starter version 3.6 første gang, vil du få dette velkomstskeærmbillede frem:



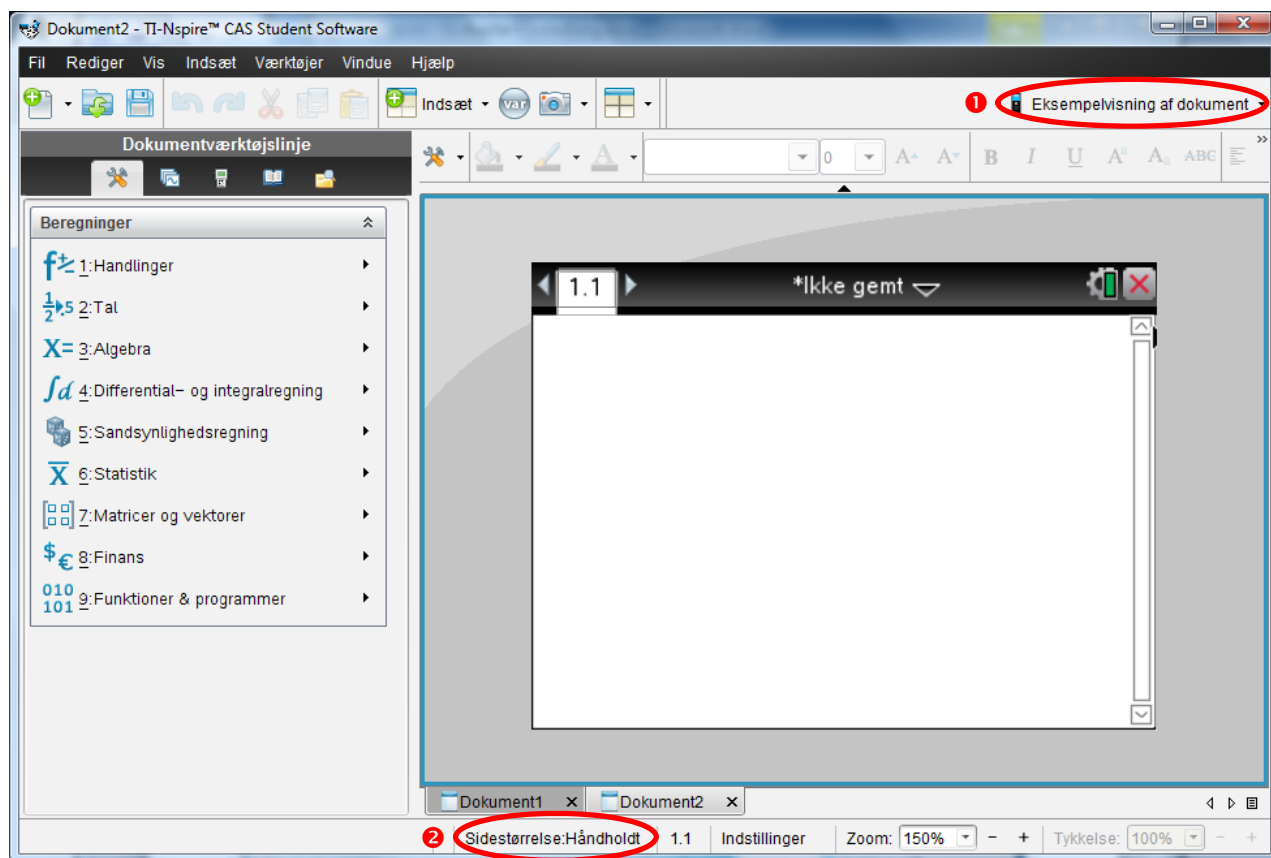
Obs

Er dit velkomstskeærmbillede slået fra, kan du slå det til igen ved at vælge menupunktet Hjælp ▶ Velkomstskeærmbillede...

Herfra har du direkte adgang til en vifte af matematikværksteder: Beregninger, Grafer, Geometri, Lister og Regneark, Diagrammer og statistik, Noter, samt Vernier Data Quest. Før musen hen over ikonerne øverst i skærmbilledet, og læs den information, der kommer frem. Du kan oprette et nyt dokument herfra ved at klikke på en af ikonerne, og du kan åbne et eksisterende dokument ved at klikke på Åbn... linket til højre i skærmbilledet.

Du kan fjerne fluebenet nederst til venstre ved 'Vis altid dette ved opstart', hvis du ikke ønsker at bruge velkomstskeærmbilledet fremover.

Prøv nu fx at klikke på Beregninger-ikonet:



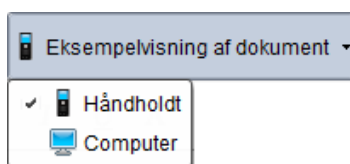
Mangler du noget i forhold til skærbilledet ovenfor, kan du genskabe standard-indstillingerne ved at foretage menuvalget

Vindue ► Nulstil layout af arbejdsområde.

Eksempelvisning og sidestørrelse

Læg godt mærke til de følgende to forhold, der bestemmer hvordan du kommer til at arbejde med programmet:

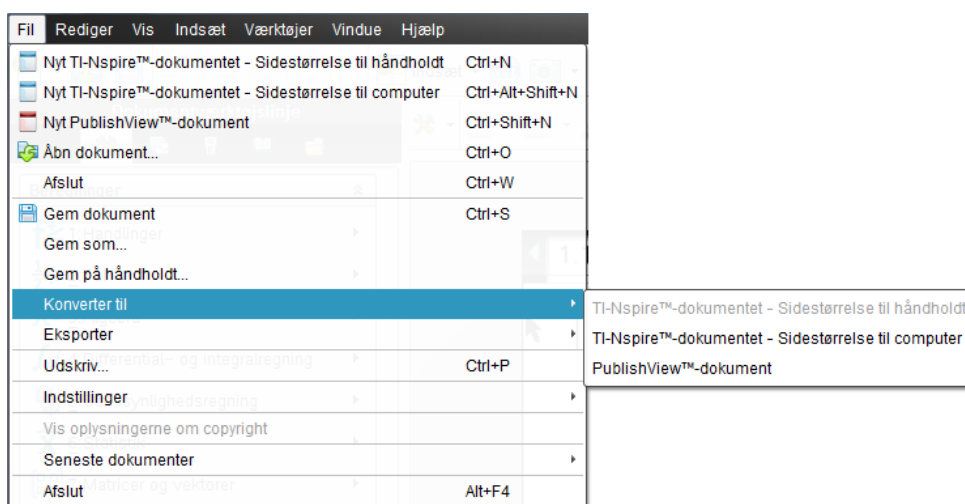
I Værktøjsbjælken øverst til højre står der **1** Eksempelvisning af dokument ▼ . Du kan både få dit dokument at se, som det ser ud på en computer og som det ser ud på en håndholdt. Hvis du også arbejder med en håndholdt (lommeregner), kan det være praktisk at sætte dokumentet op så det også kan bruges på din lommeregner i timerne. Ellers vælger du bare eksempelvisning Computer i rullegardinmenuen, der fremkommer når du taster på pilen ▼ .



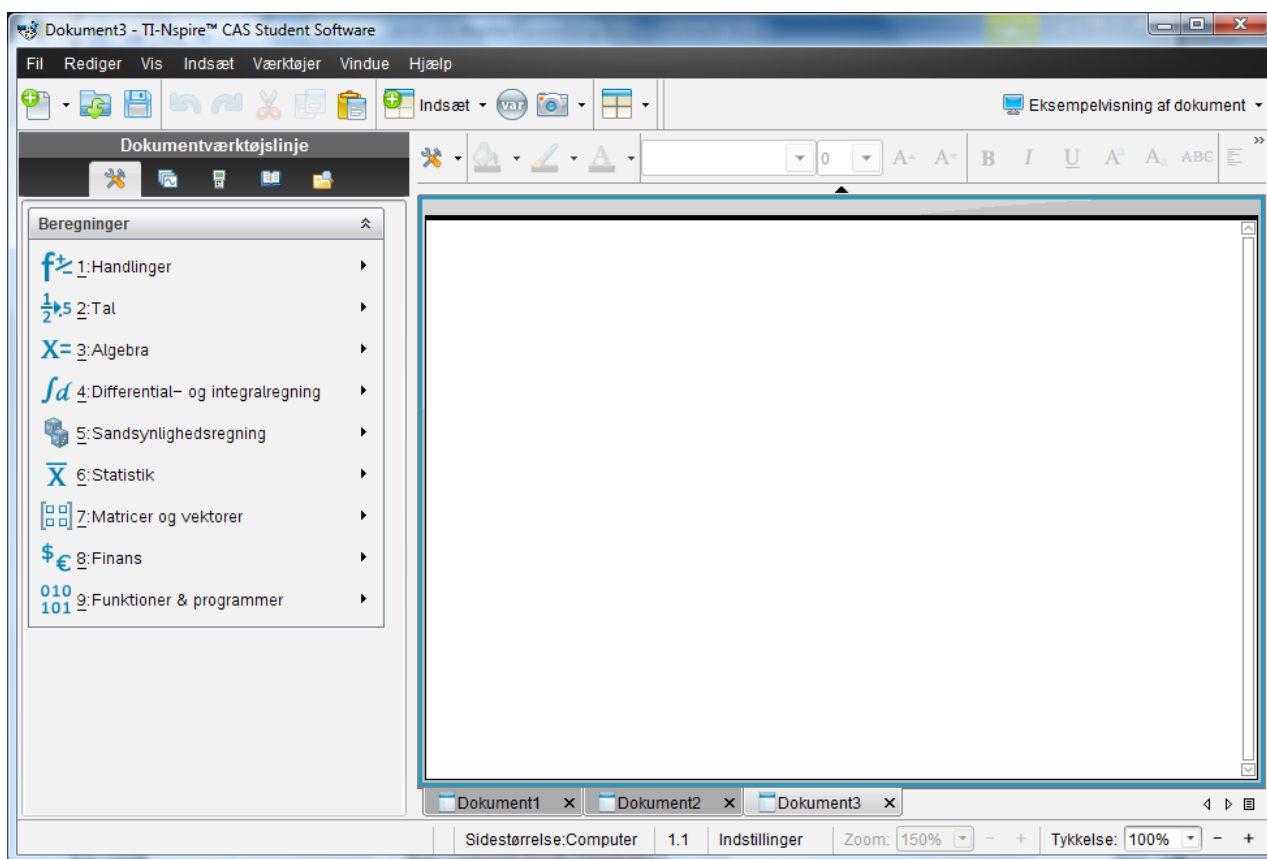
På statuslinjen nederst til venstre står der **2** Sidestørrelse:Håndholdt. Igen afhænger det af om dokumentet skal bruges på en håndholdt eller en computer.

På en computer er sidestørrelsen valgt, så den passer med et *halvt* A4-ark (i opløsningen 640×434 pixels). På en håndholdt er sidestørrelsen valgt så den passer med lommeregnerskærmen (svarende til den halve opløsning på hvert led, dvs. 320×217 pixels). Hvis du arbejder med lommeregnere i timerne og ønsker at arbejde videre med dokumenter oprettet på computeren skal sidestørrelsen derfor sættes til den håndholdtes. Ellers skal du skifte til sidestørrelse computer.

Der findes også en sidestørrelse, der passer med et *helt* A4-ark, nemlig det såkaldte Publish-view format. Du skifter sidestørrelse med Konverter-menuen under Filer:

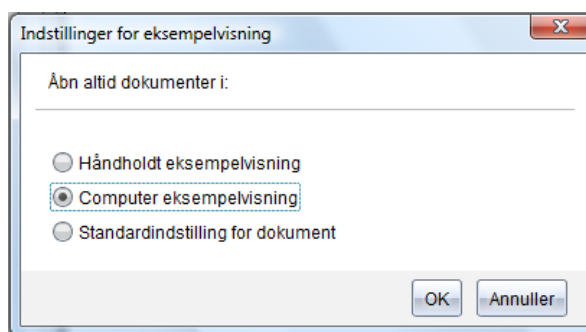
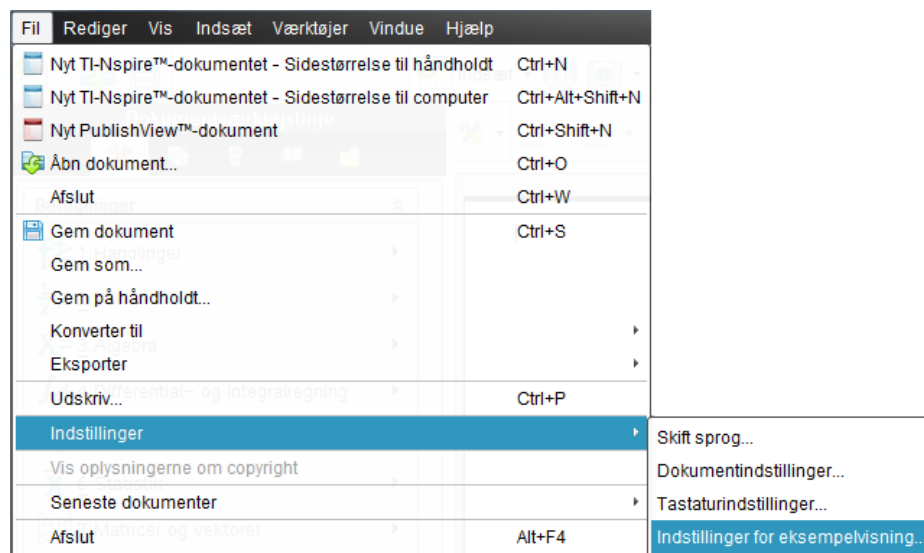


Når du har skiftet til Sidestørrelse Computer ser dit skærbillede således ud:



Fremover skal du nu beslutte dig til om du vil tilpasse dit dokument til en håndholdt eller til en computer. I det følgende går vi ud fra at dokumentet er tilpasset en computer, dvs. såvel eksempelvisningen som sidestørrelsen er sat til computer.

Eksempelvisningen kan heldigvis sættes som standard til Computer ved at gå ind i **Fil ▶ Indstillinger ▶ Indstillinger for eksempelvisning**



Obs

I denne vejledning dækker betegnelsen Ctrl/Cmd over at du på en PC taster Ctrl, mens du på en MAC taster Cmd.

Desværre findes der ikke en tilsvarende standardindstilling for sidestørrelsen. Her må du enten konvertere sidestørrelsen, som allerede forklaret, eller du må åbne et nyt dokument i **Sidestørrelse computer**, hvilket kan gøres fra **Fil**-menuen eller du kan bruge genvejen

Ctrl/Cmd Alt Shift N

Sidepanelet i TI-Nspire CAS

Sidepanelet i TI-Nspire CAS dækker over adskillige funktioner. I Dokumentværktøjslinjen finder du fem ikoner, som vi nu ser nærmere på





1. Værkstedsmenuer

Det første ikon med hammer og skruenøgle dækker altid over *værkstedsmenuer*. Det viser de *aktuelle menuer*, for det matematikværksted du arbejder i for tiden. Så længe man er ved at lære et matematikværksted at kende kan det være en god ide at holde værktøjsmenuen åben i sidepanelet, så man hele tiden har oversigt over værktøjerne. Men læg mærke til at værktøjsmenuerne altid dubleres på værktøjsmenubjælken:



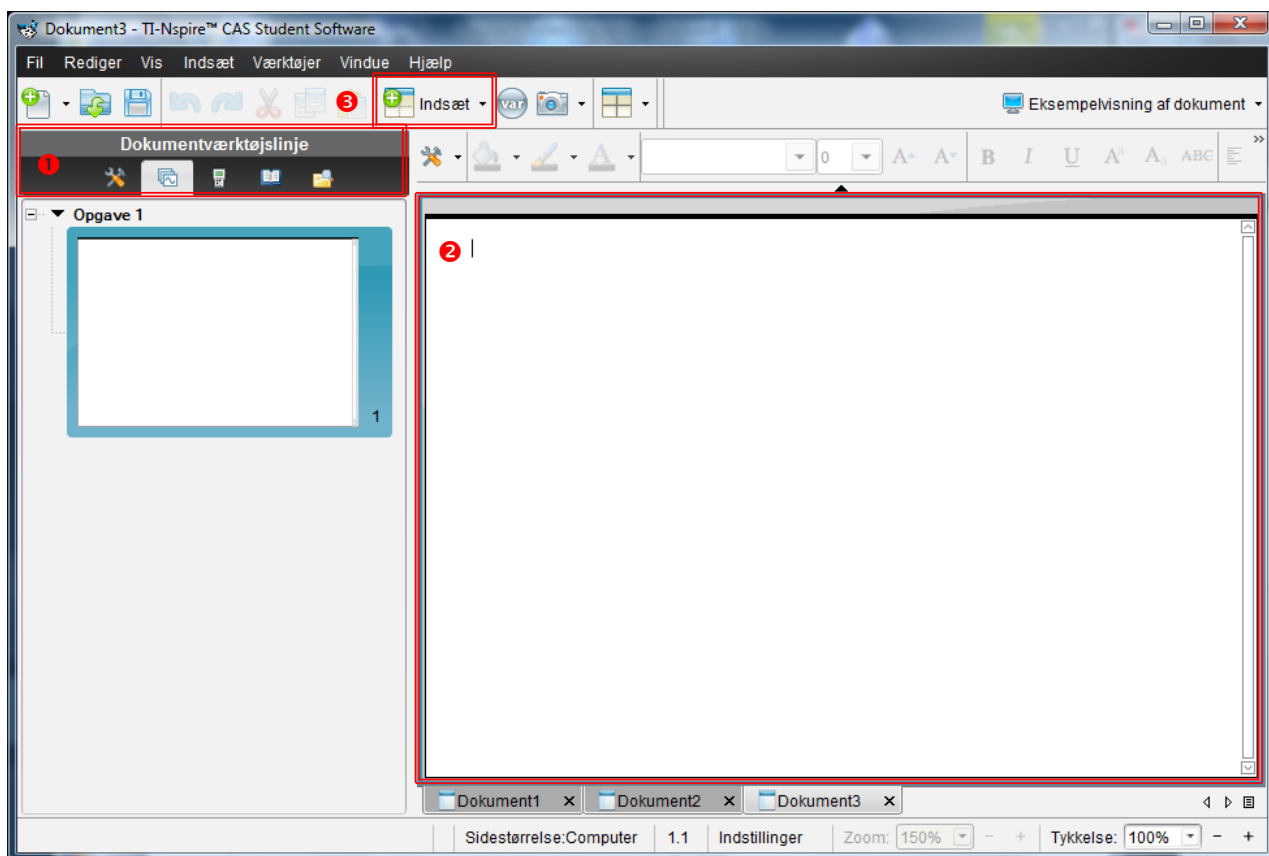
Når man først er blevet fortrolig med menuerne hørende til et bestemt værktødssted har man altså altid hurtig adgang til dem.

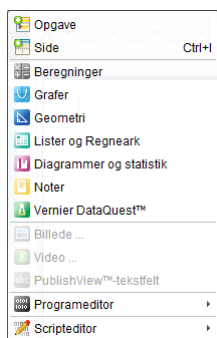


2. Sidesorteren

Det næste ikon åbner for *sidesorteren*: Det giver en hurtig oversigt over siderne i dokumentet. Et dokument består nemlig af en række opgaver fordelt på en række sider. Et TI-Nspire CAS dokument kan sammenlignes med en novellesamling: De enkelte noveller svarer til de forskellige opgaver, som sagtens kan rumme de samme navne på fx funktioner som f , g og h , men når funktionerne optræder i forskellige opgaver, bygger de på forskellige forskrifter. Selvom personnavne kan gå igen i de forskellige noveller dækker de altså over forskellige personer. Men inden for den samme novelle dækker et navn over en og samme person gennem hele novellen og det samme gælder fx for funktionsnavnene inden for den samme opgave.

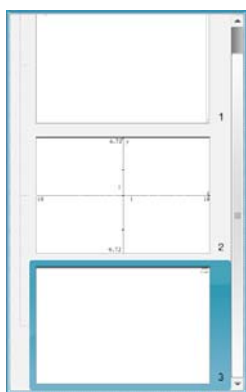
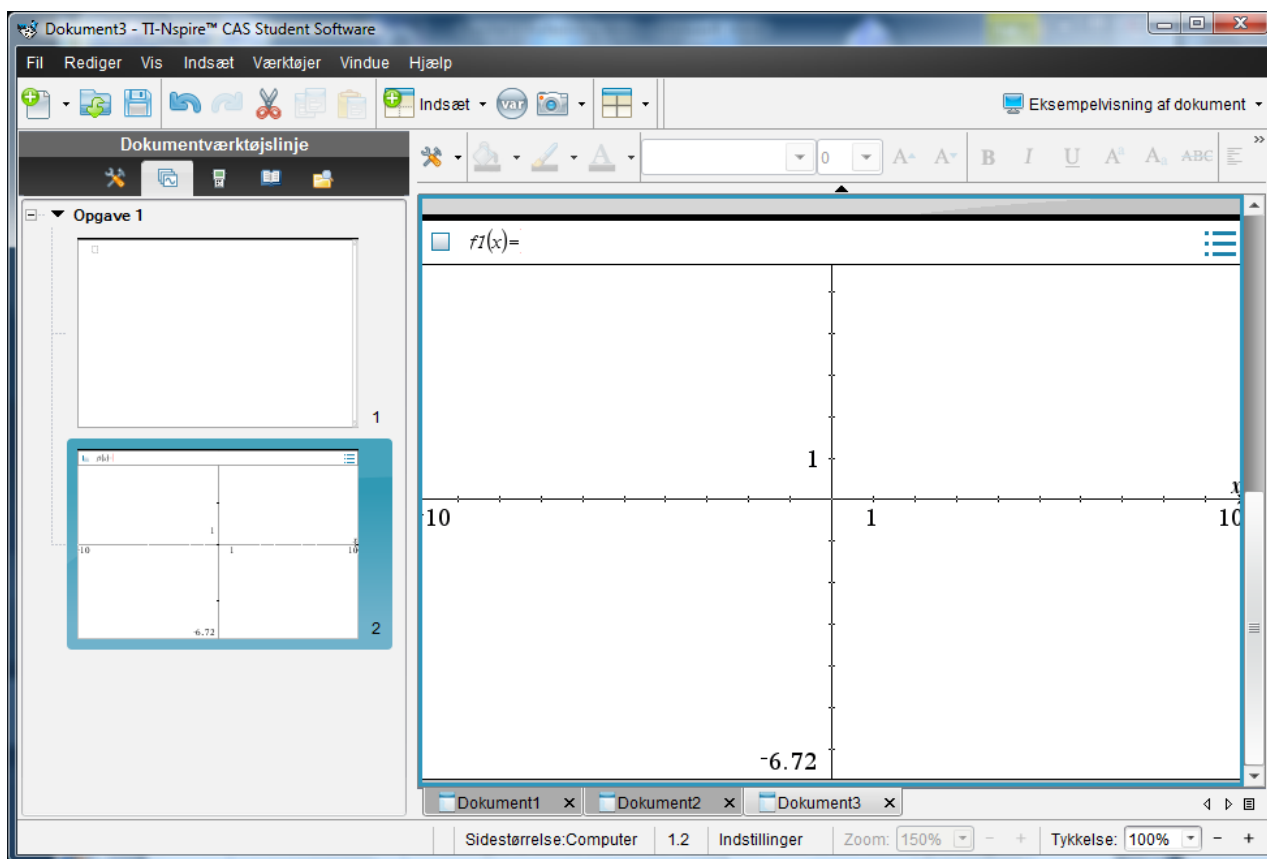
Prøv nu at åbne for *sidesorteren* i Dokumentværktøjslinjen **1**. I velkomtbilledet valgte vi at starte i værktødsstedet til *Beregninger*. Her fås en blank skærm frem klar til indtastning for oven **2**.





Hvis du vil tage et kig i de andre værksteder, så indsætter du dem ved at trykke på **Indsæt** knappen **Ⓢ** (Billede, Video og Tekstfelt-editorene er kun tilgængelige i Publish-view formatet).

Indsæt fx et **Graf**-værksted ved at vælge **Grafer** i **Indsæt**-menuen. Straks ser du, at dit arbejdsområde er et koordinatsystem, og i det venstre sidepanel er der tilføjet en miniature. Du har tilføjet en *side* til din *opgave*. Læg mærke til, hvordan arbejdsområdet og sidepanelet ændres.



Prøv nu også at tilføje et **geometri**-værksted og hold øje med miniaturerne. Ved at klikke i en af miniaturerne, kan du gå til ethvert af de værksteder, du har tilføjet. Men du kan også skifte mellem siderne i dit dokument ved at trække i elevatorbjælken yderst til højre i arbejdsområdet. Endelig virker lommeregnergenvejene **Ctrl/cmd** → og **Ctrl/cmd** ← også i softwareversionen. Der er altså mange måder at skifte sider på og det er derfor ikke afgørende, at du hele tiden har sidesorteren åben.

Sidesorteren er dog afgørende, når du vil ændre *rækkefølgen* af siderne i dokumentet: Rækkefølgen af siderne kan nemlig ændres ved at trække siderne til den ønskede placering.

Ved at vælge det første menupunkt i **Indsæt**-menuen, får du endelig indsat en ny opgave i dit dokument. Denne opgave kan så tilføjes nye værksteder osv.

3. TI - Smartview

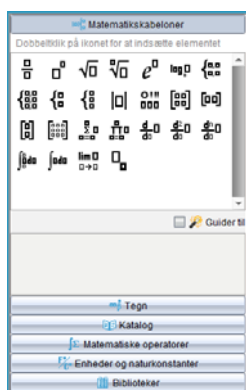


Her frembringes et lommeregnerastatur, som kan bruges til indtastning ved at klikke med musen på lommeregner-tasterne. Hvis du er vant til at bruge en lommeregner, kan det sommetider være nemmere, specielt i starten, at bruge lommeregnerastaturet til indtastning i softwareversionen, fordi der er nem adgang til en lang række funktioner på lommeregnerastaturet. Hvis du ydermere kører med sidestørrelse håndholdt og eksempelvis håndholdt vil arbejdsområdet blive vist præcist som det ser ud på lommeregneren.

Her har vi – ved hjælp af rullemenuen ud for lommeregnerikonet – vist tastaturet for farvelommeregneren CX i såkaldt høj kontrast, hvor de forskellige familier af taster er fremhævet.

Men bruger du aldrig lommeregner er denne facilitet selvfølgelig ikke til megen nytte ☺

4. Hjælpeprogrammer



Dette er en vigtig samling af hjælpeprogrammer, der giver oversigter over de matematiske skabeloner, matematiske tegn og matematiske kommandoer, som du har til rådighed i programmet.

Læg mærke til du kan indsætte skabeloner, for fx

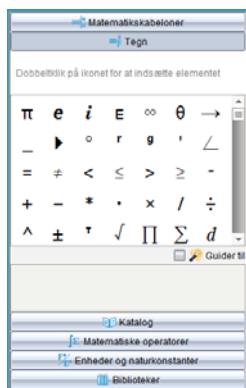
Brøker: $\frac{\square}{\square}$

Kvadratrødder: $\sqrt{\square}$

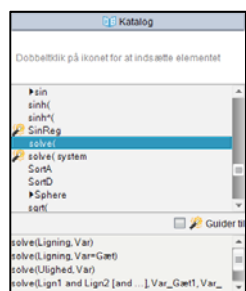
Potenser: \square^{\square}

Indeks: \square_{\square}

osv. Det gør det langt nemmere at holde styr på indviklede formler.

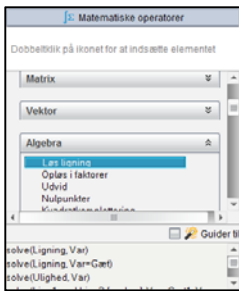



Du kan også indsætte *specialtegn* inklusive græske bogstaver mm. Nogle af de tegn du indsætter har specielle betydninger. Ser du fx på første række finder du symbolet for forholdet mellem omkreds og diameter i en cirkel, dvs. pi, symbolet for grundtallet til den naturlige logaritme, dvs. e , symbolet for kvadratroden af minus en, dvs. i , symbolet for en eksponent, når et tal skrives i videnskabelig notation, dvs. E , osv. Disse symboler kan typisk *ikke* indtastes direkte fra tastaturet, så det er vigtigt at kunne finde dem i tegnoversigten.



Endelig giver **Katalog** en *alfabetisk oversigt* over alle kommandoer med nødvendige forklaringer til hvordan kommandoen bruges. Det er vist her med **solve**-kommandoen, hvor man kan se at man kan løse ligninger, dels ved bare at angive den ubekendte **Var** til sidst, dels ved at tilføje et gæt for den ubekendte og dermed styre løsningen af mere komplicerede ligninger, fx

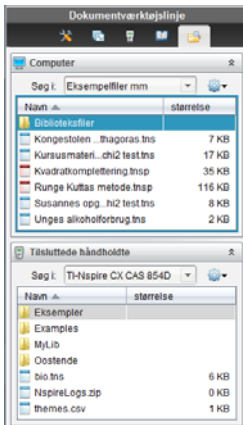
$$\text{solve}(x^x = 2x, x = 0.5).$$



Kataloget findes også som en *emneoversigt*,  **Matematiske operatører**, hvor kommandoerne i stedet er opdelt efter emner. Hvis man fx vil løse en ligning, så hører **solve**-kommandoen under emnet **Algebra**, hvor man finder de samme oplysninger som før. Fx at man også kan bruge **solve**-kommandoen til at løse uligheder

$$\text{solve}(x^2 < 4, x).$$

5. Indholdsstifinder



Det sidste ikon — Indholdsstifinder — indeholder to stifindervinduer: Et til din PC/MAC og et til din tilkoblede håndholdt. Den håndholdte tilsluttes via det USB-kabel, der fulgte med den håndholdte. Den håndholdte registreres automatisk når den tilsluttes PC'en eller MAC'en. Første gang installeres der en driver hørende til den håndholdte, men derefter dukker den automatisk op i stifindervinduet. Når du klikker på lommeregneren i det nederste stifindervindue får du en liste over mapper og filer gemt på håndholdte.

Her kan du nu åbne dine gemte dokumenter fra den håndholdte ved at dobbeltklikke på dem (eller trække dem over i arbejdsområdet), hvor de dukker op i sidestørrelse håndholdt. På den måde kan du nemt arbejde videre med dokumenter oprettet på den håndholdte. Tilsvarende kan du nemt overføre dokumenter fra den håndholdte til din PC — og omvendt, ved blot at trække dem frem og tilbage mellem de to stifindervinduer. Den håndholdte fungerer i den sammenhæng altså på samme måde som et USB-stick.

Du kan skjule sidepanelet ved at vælge menupunktet

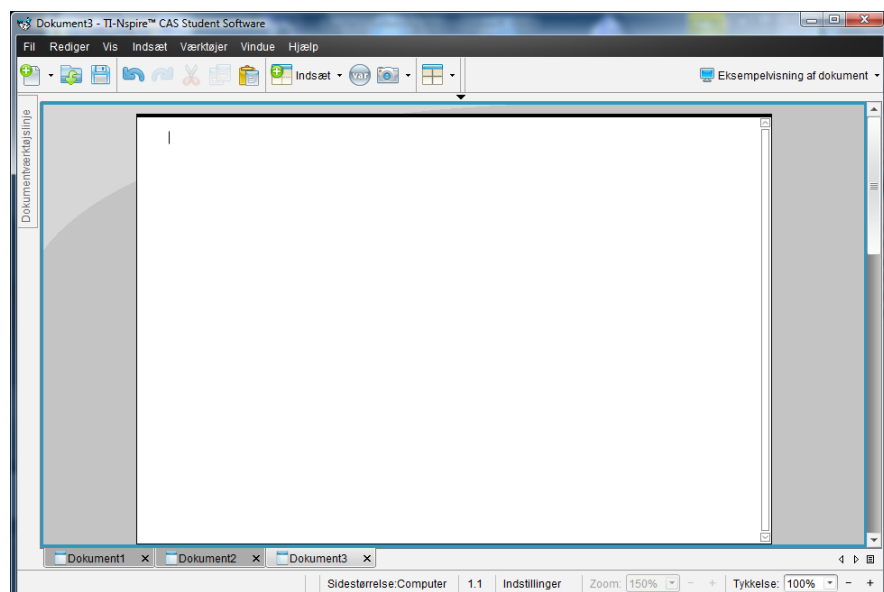
Vindue ► Skjul automatisk Dokumentværktøjslinjen,

og en lodret fane bliver placeret til venstre for det udvidede arbejdsområde. Du aktiverer denne fane ved at placere markøren over den, og værktøjsmenuen popper ud fra venstre side. Prøv!

Tilsvarende kan du skjule/visе værktøjs- og formaterings-bjælken oven over arbejdsområdet ved at klikke på pilen ▲/▼ på midten af bjælken:

Tip

Forsvinder sidepanelet eller værktøjs- og formateringsbjælken *utilsigtet* kan du også få dem tilbage ved hjælp Vindue ► nulstil layout af arbejdsområde.

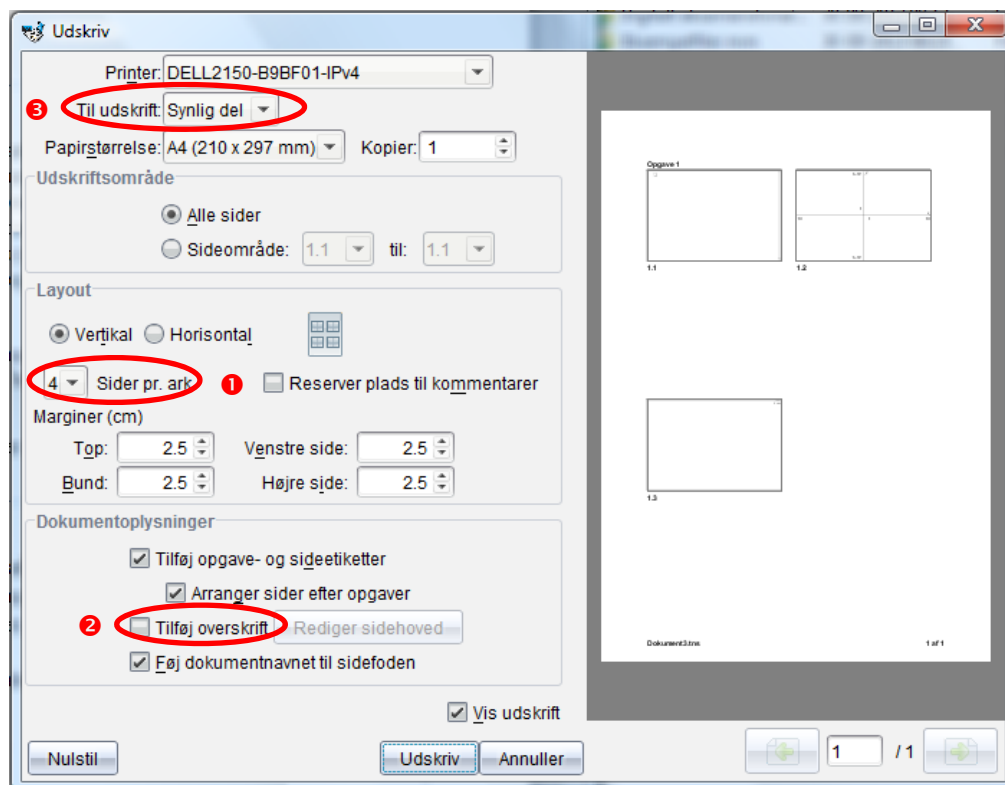


Udskriv

Den sidste almene facilitet vi kigger på inden vi går i gang med at se på den enkelte matematikværksteder i detaljer er udskrivningsmulighederne, som du finder det sædvanlige sted med den sædvanlige genvej

Fil ▶ Udskriv... CTRL/CMD P

Derved åbnes for udskriftdialogboksen:



Da en side i et standarddokument arbejder med en sidestørrelse tilpasset computeren, så den fylder et halvt A4-ark på papir, skulle man tro man kunne udskrive 2 sider pr ark. Men denne mulighed er desværre stadigvæk ikke implementeret. I stedet tilbydes man som standard 4 sider pr ark **1** svarende til uddelingskopier ved en præsentation, hvor deltagerne kan supplere med deres egne håndskrevne noter. *Man skal derfor huske at ændre antal Sider pr ark til 1!*

Herefter kan man bl.a. vælge Tilføj overskrift og vælge Rediger sidehoved **2**, hvor man får mulighed for at tilføje to linjer foroven med fx Navn, Opgavetitel, Skole osv. Det er praktisk ved afleveringer på papir, ikke mindst i en eksamenssituation, hvor skolen kræver disse informationer tilføjet eksamensbesvarelsen 😊.

Som standard udskrives siderne i dokumentet præcis som de fremstår på skærmen. Men man kan også i toppen af dialogboksen ændre boksen Til udskrift **3** fra Synlig del til Udskriv alt. Alle matematikværkstederne skrives da efter tur ud indtil bunden af værket er nået – også selv om værket kun fremstår delvist med en rullebjælke til højre, så man skal scrolle på skærmen for at få lov til at se hele indholdet. Denne udskriftmulighed anbefales til eksamen, hvis man ikke er sikker på at få det hele med!

1



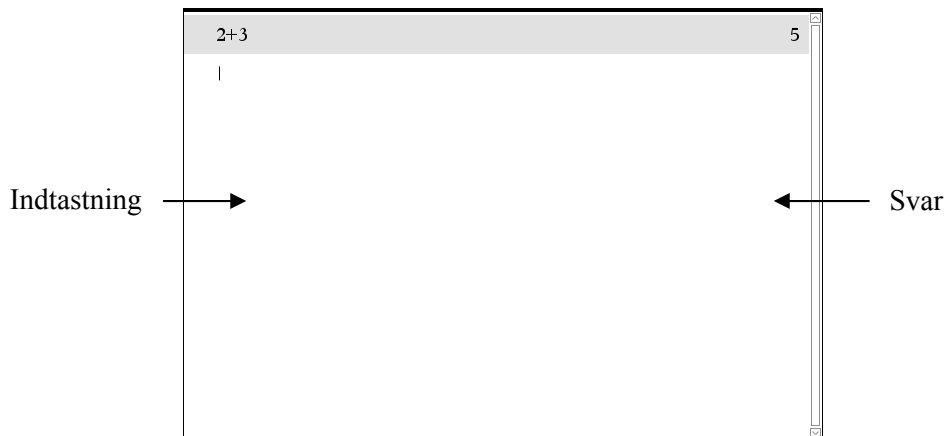
Beregninger

For at få TI-Nspire CAS softwaren til at lave noget fornuftigt så hurtigt som muligt, vil kun de absolut nødvendige dele af **Beregninger** blive omtalt her. I de følgende afsnit kommer turen til de andre værksteder.

Indtast $2 + 3$ og afslut med **Enter**. Resultatet er selvfølgelig ikke særlig interessant, men tag et kig på skærbilledet:

Obs

Hver anden linje markeres med lysegrå baggrund, hver anden linje er uden baggrund. På den måde kan man nemt skelne mellem de forskellige indtastnings/svarpar.



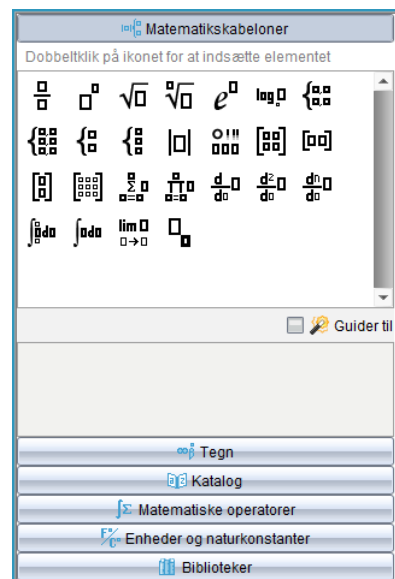
Den første lille opgave

Udregn udtrykket

$$-3.17 + \frac{2.53^2 - \sqrt{5.25}}{2.46}$$

1:Ans -
2:(-) Negere

Når du indtaster fortegnet, popper en liste op, hvor du (her) skal vælge (-) Negere. Der indgår en brøkstreg i udtrykket. Dette afstedkommer ofte brug af parenteser, men på TI-Nspire CAS kan du undgå dette ved at bruge skabeloner. Tryk på fanen **Hjælpeprogrammer** i sidepanelet og vælg her **Matematikskabeloner**:



Indsæt brøkskabelonen ved at dobbeltklikke med musen. Herefter skulle du gerne have dette på din skærm:

$$-3.17 + \frac{\square}{\square}$$

Indtast tælleren — kvadrat og kvadratrodstegnet findes der også skabeloner til. Når tælleren er indtastet, flytter du til nævneren med ↓ - tasten, og indtaster denne. Nedenfor ser du skærbilledet med udtrykket korrekt indtastet:

Tip

Du kan hurtigere lave potensopløftning med ^ - tasten på dit tastatur. Efter indtastning af eksponenten kommer du tilbage til basislinjen ved at taste →

Skulle du lave en fejl undervejs, *før* du taster **Enter**, kan du

- vha. piletasterne pile hen til den eller de fejl, du måtte have lavet
- slette et enkelt tegn ved at placere markøren før det tegn, der skal slettes, og taste **DEL**
- indsætte et eller flere tegn på markørens position ved blot at skrive på det pågældende sted

Tip

Du kan også kopiere ved at markere med musen, og benytte **Ctrl/Cmd C** for at kopiere og **Ctrl/Cmd V** for at indsætte.

Du kan også med musen markere, det du vil kopiere, og trække det til indtastningslinjen.

Opdager du en fejl, *efter* at du har tastet **Enter**, kan du hente udtrykket ved at pile op til det (tast to gange ↑), hvorved det markeres i blåt.

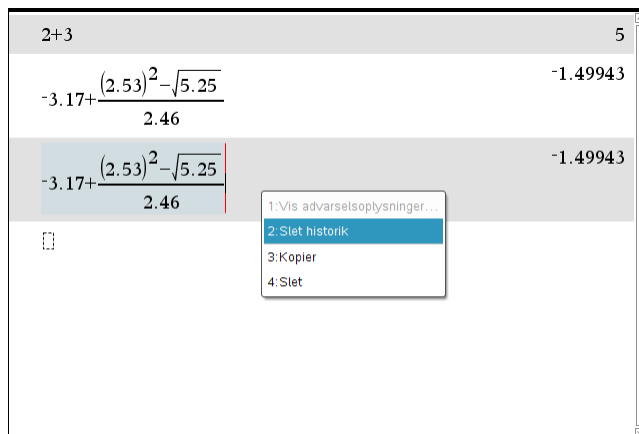
Når du har det, du vil hente, markeret, taster du **Enter**, hvorefter udtrykket hentes ned til indtastningslinjen, så du kan rette fejlen og få udtrykket genberegnet — se nedenstående to skærbilleder:

Selvom det endnu er til at overse, kan du lige så godt lære at rydde op efter dig i historikområdet. Pil op til den linje (tast ↑) du vil slette

Tip

I stedet for at rydde op kan du indsætte et nyt værksted med Ctrl/Cmd I eller oprette et nyt dokument med Ctrl/cmd N.

- Slet linjen med DEL eller BackSpace.
- Hele historikområdet sletter du ved at højre-klikke i historikområdet, og vælge Slet historik:



Hvis du fortryder, at du har slettet hele historikken eller en anden handling, så findes der en fortryd-knap — eller du kan taste Ctrl/Cmd Z.



Brøkgregning — regning med eksakte tal

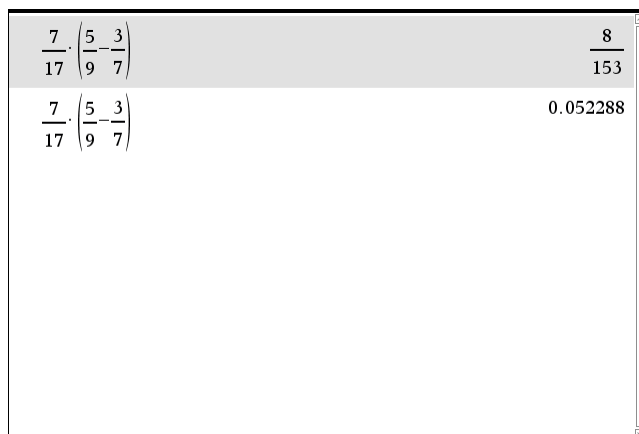
TI-Nspire CAS regner naturligvis eksakt med brøker af hele tal, hvor slutresultatet altid forkortes i bund.

Beregn udtrykket $\frac{7}{17} \cdot \left(\frac{5}{9} - \frac{3}{7} \right)$

Indtast med flittig brug af brøkskabelonen:

Tip

Genvejstasten for division er /



Obs

Eksakt beregning er kun mulig, hvis der udelukkende indgår eksakte tal i udtrykket.

Findes der blot et enkelt decimaltal i udtrykket, bliver resultat et decimaltal.

I første linje er indtastningen afsluttet med **Enter**, og resultatet vises som en uforkortelig brøk. I anden linje er indtastningen afsluttet med **Ctrl/Cmd Enter** — dette giver en tilnærmet værdi.

Det er ikke kun rationale tal, der behandles eksakt. Det samme gælder for irrationale tal, der så vidt det er muligt pr. automatik omskrives til et standardformat. Nedenfor ser du nogle eksempler på dette (hvor logaritmen til 100 tastes som $\log(100)$):


$\sqrt{12}$	$2 \cdot \sqrt{3}$
$(1-2 \cdot \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}+3)^2$	$2 \cdot \sqrt{3} + 25$
$\ln(100)$	$2 \cdot \ln(10)$
$\log_{10}(100)$	2

Regning med bogstaver

Reducer udtrykket $2(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{x} - x)^2$

Tip

Potenser skrives vha. ^ - tasten.

Opret en ny opgave ved at klikke på  og tilføj et Beregningsværksted. Hold godt øje med markøren mens du taster. Undervejs skal du bruge \rightarrow til at slippe ud af kvadratrødder, potenser og parenteser. Læg mærke til, at du kun behøver at sætte venstreparenteser — højreparenteser sættes automatisk.

Det eneste, du skal foretage dig for at få udtrykket reduceret, som vist, er at trykke på **Enter**, TI-Nspire CAS vil pr. automatik søge at reducere udtrykket mest muligt:

Tip

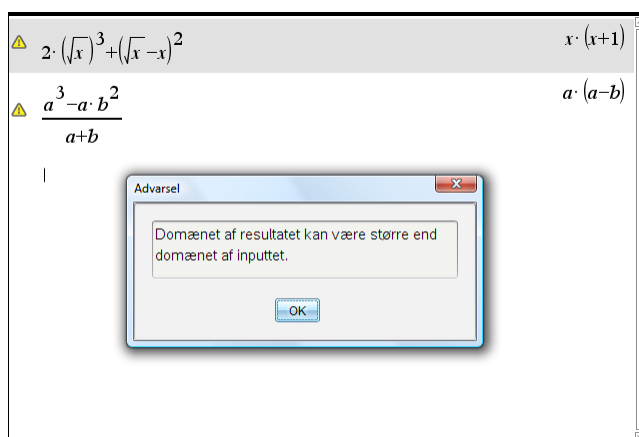
Advarselstrekanten



betyder, at resultatet kan være defineret i et større talområde end det oprindelige udtryk. I det oprindelige udtryk skal der forudsættes, at $x \geq 0$. Dette er ikke nødvendigt i resultatet.

Reducer udtrykket $\frac{a^3 - a \cdot b^2}{a + b}$.

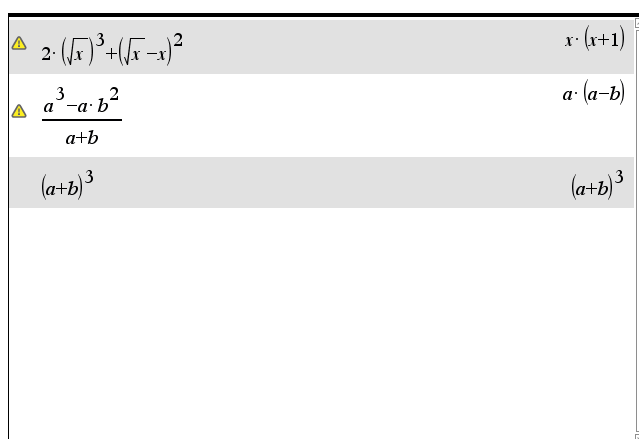
Du behøver blot at taste udtrykket ind — reduktionen sker igen automatisk:

**Tip**

Advarselstrekanten betyder her, at man i det oprindelige udtryk skal forudsætte $a + b \neq 0$. Dette er ikke nødvendigt i resultatet.

Når TI-Nspire CAS altid reducerer et udtryk mest muligt, hvad gør du så, hvis du vil have udregnet fx $(a + b)^3$?

Indtast $(a + b)^3$ og tast Enter. Der sker intet med udtrykket:

**Tip**

3-tallet foran Algebra viser, at genvejen til Algebra menuen er 3. Tilsvarende for Udvid.

— men det er der råd for:

I værktøjsmenuen vælger du **X= 3:Algebra ▶ 3:Udvid**, og kommandoen `expand()` indsættes i indtastningslinjen med markøren placeret i parentesens klar til indtastning.

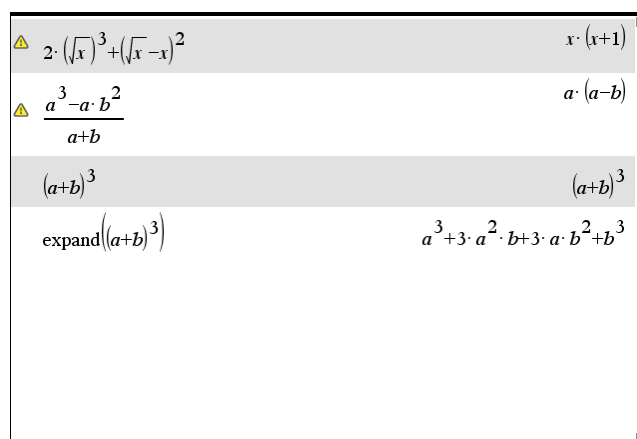
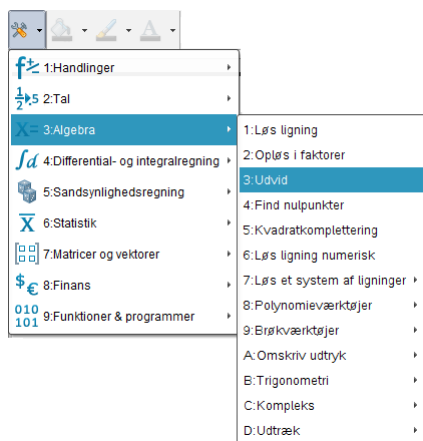
Obs

Selvom du vælger Udvid i menuen er det `expand()` der indsættes.

Pil op og hent $(a + b)^3$ i historikområdet, og tast Enter. Udtrykket omskrives herefter til ledform, dvs. parentesens ganges ud og udtrykket skrives som en flerleddet størrelse:

Tip

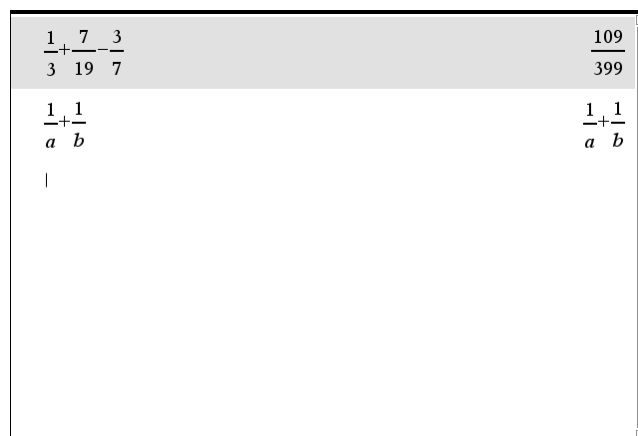
Du kan også skrive `expand()` direkte fra tastaturet.



Om at sætte på fælles brøkstreg

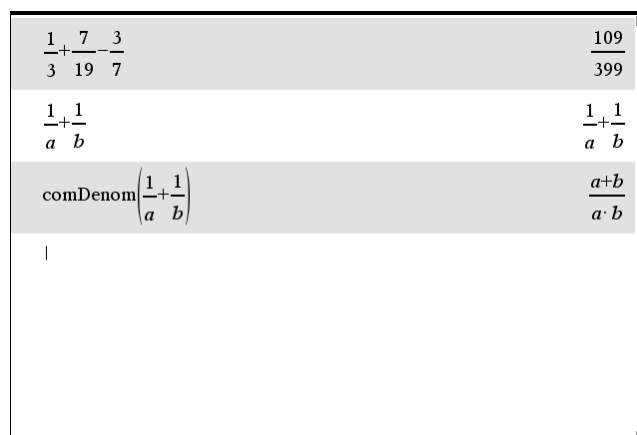
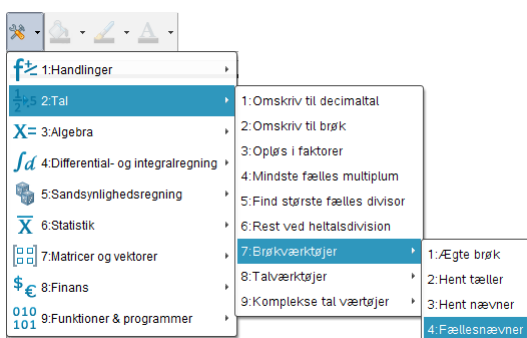
Som du tidligere har set, sættes talbrøker pr. automatik på fælles brøkstreg. Det samme gælder ikke summer og differenser af symbolske brøker.

Obs
ComDenom er en forkortelse af Common Denominator, som betyder "fælles nævner".



Hertil skal du bruge kommandoen ComDenom:

Vælg i værktøjsmenuen $\frac{1}{2} \rightarrow 5$ 2: Tal \rightarrow 7: Brøkværktøjer \rightarrow 4: Fællesnævner



Katalog

Obs

Drejer det sig blot om at konvertere et resultat, kan menu-punktet

$$\frac{1}{2} \cdot 5$$

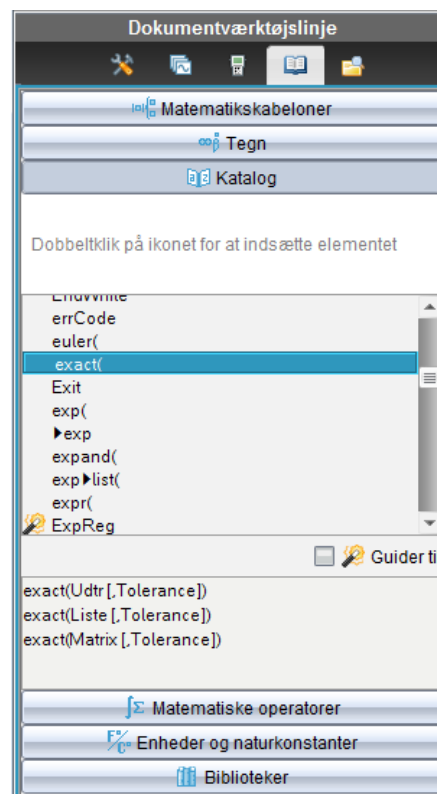
► Omskriv til brøk benyttes i stedet for exact.

Tip

Syntaksen for exact står i feltet for neden. Kommandoen exact skal som argument dels have et udtryk, og dels en valgfri tolerance, der skal adskilles med et komma.

Der findes en kommando med navnet exact, der omsætter et decimaltal til brøk. Kommandoen exact findes ikke i nogen af menuerne, så den må du finde andetsteds — eller eller naturligtvis blot skrive den.

Du kan finde den i den alfabetisk ordnede fortegnelse over alle instruktioner i Katalog: Klik på knappen Hjælpeprogrammer i sidepanelet og klik her på fanen Katalog. Med piletasterne samt PgUp-, PdDn-, Home- og End-tasterne kan du blade i listen. Taster du e vil du hoppe til starten af de kommandoer, der starter med e. Flyt markeringen til exact(, og tast Enter. Kommandoen exact() kopieres da til indtastningslinjen. Nedenfor ser du et par eksempler på brugen af exact:



Obs

Eksponentnotationen E-4 fremkommer automatisk, når man skriver 0.0001 i eksakt() kommandoen.

Hvis man selv vil skrive eksponenttegnet E skal man hente det i sidepanelet, ligesom man skal taste eksponenten -4 ind normalt (dvs. ikke som en eksponent).

exact(0.375)	$\frac{3}{8}$
exact(0.333)	$\frac{333}{1000}$
exact(0.333,0.001)	$\frac{1}{3}$
exact(0.333,1.E-4)	$\frac{333}{1000}$

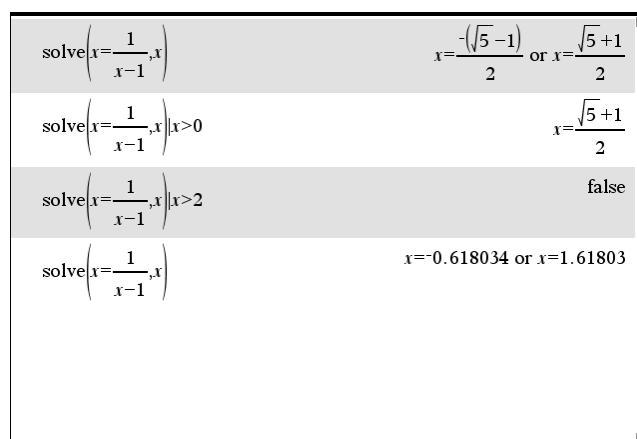
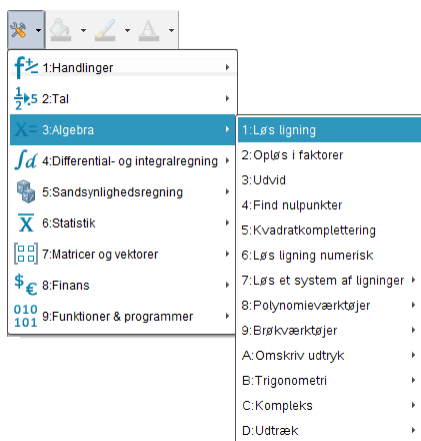
Ligninger og genbrug

Løs ligningen $x = \frac{1}{x-1}$

Tip

Numerisk løsning af ligninger kan også udføres ved at skrive nSolve i stedet for solve. Kommandoen nSolve findes i Algebra-menuen som Løs ligning numerisk.

Vælg i værktøjsmenuen X= 3:Algebra ► 1:Løs ligning, og solve() bliver indsat på skærmen. Herefter indtaster du ligningen og fortæller, at ligningen skal løses med hensyn til x ved at skrive ,x efter ligningen. Tast Enter, og ligningen løses:

**Tip**

Skulle du rende ind i en ligning solve ikke kan klare, kan du bruge nSolve med et passende gæt (se afsnittet om ligninger og uligheder).

Hvis du kun er interesseret i fx den positive løsning, kan du begrænse løsningsintervallet til de positive reelle tal vha. betingelsesoperatoren | (findes som tast på en PC).

I skærmbilledet ovenfor henter du den indtastede ligning og indsætter betingelsesoperatoren | efterfulgt af $x > 0$. Tast Enter, og ligningen løses endnu engang (anden linje).

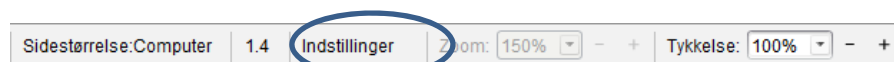
Laver du løsningsintervallet således, at der ingen løsninger er, svarer maskinen med false (tredje linje).

Er du ikke interesseret i de eksakte løsninger, men blot nogle tilnærmede, klares sagen med tastetrykket Ctrl/Command Enter (sidste linje).

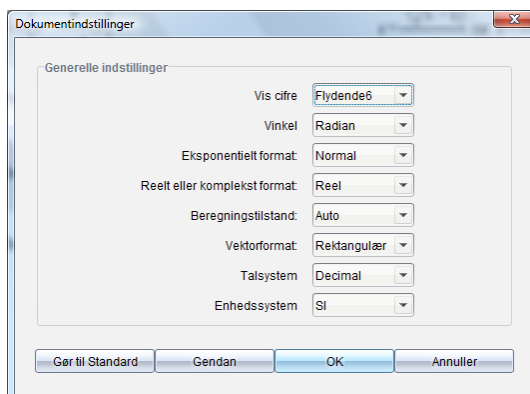
Antal decimaler**Obs**

Det er her du evt. kan skifte mellem indstilling i grader og radianer. Generelle indstillinger dækker alt bortset fra Grafer og Geometri, dvs. Beregninger, Noter, Lister og Regneark samt Diagrammer og statistik.

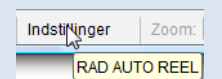
Hvis du vil have resultatet med flere eller færre decimaler end ovenfor, så skal du ændre indstillingerne ved at dobbeltklikke på Indstillinger i statuslinjen i bunden af skærmen:



Dette bringer denne dialogboks frem

**Tip**

Hvis du holder markøren et øjeblik over Indstillinger, får du vist dine indstillinger:



I listen Vis cifre vælger du det antal decimaler du finder passende, og afslutter med Enter.

2

Grafer

I Graf-værkstedet kan du tegne og undersøge mange forskellige former for grafer.

En lille opgave med grafer

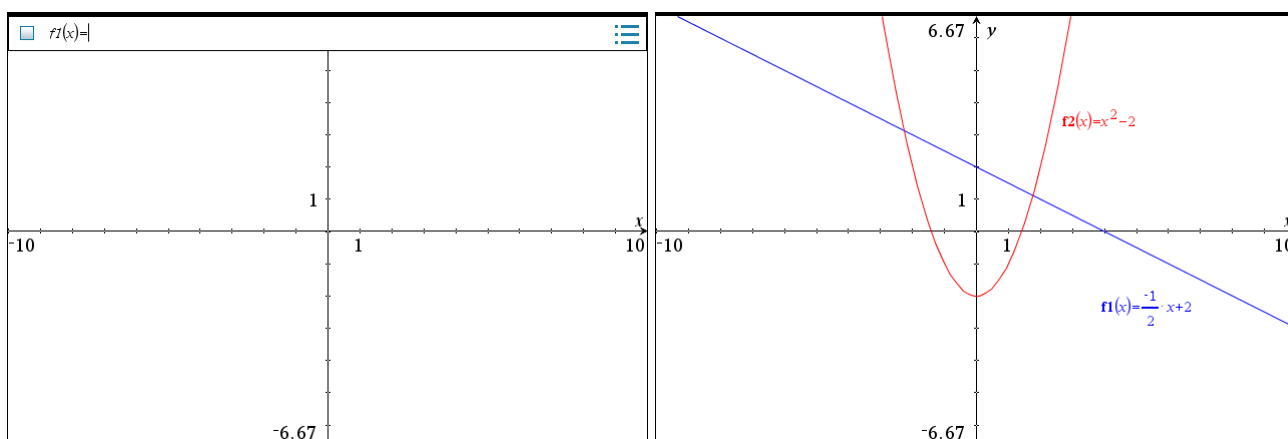
Tegn grafen for den lineære funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ og grafen for andengradspolynomiet $g(x) = x^2 - 2$.

Bestem skæringspunkterne mellem linjen og parablen.

1. Tegn graferne



Opret et nyt dokument ved at klikke på ikonet for at tilføje et nyt dokument — denne gang med et Graf-værksted tilføjet. Herefter skulle din skærm gerne se sådan ud (venstre skærbillede):



Obs

Når du opretter et nyt dokument er det gamle dokument stadig åbent, og vil du senere fortsætte med at arbejde heri, så klikker du blot i fanen for dokumentet under arbejdsområdet:

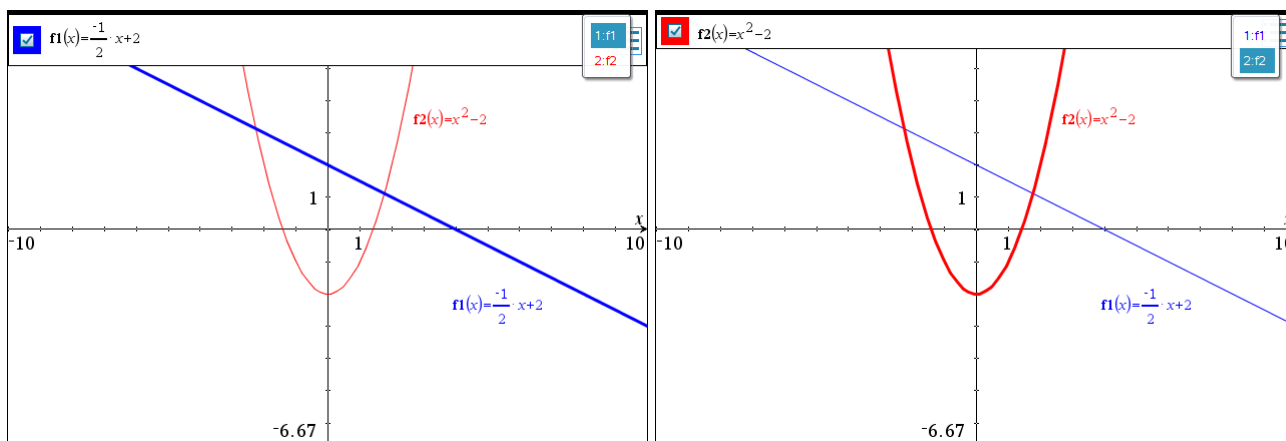
Indtastning af funktionerne sker i indtastningslinjen øverst på skærmen. Hvis du ikke allerede er oppe i indtastningslinjen, så klik med musen i feltet eller åbn indtastningslinjen ved at dobbeltklikke i grafrummet eller taste TAB.

Når indtastningen af $f1(x)$ afsluttes med Enter, tegnes grafen straks, og indtastningslinjen lukker. Du åbner indtastningslinjen igen ved at dobbeltklikke i grafen.

På skærbilledet til højre ser du, hvordan det skal se ud, når begge forskrifter er indtastede. Så længe du er i indtastningsfeltet kan du med piletasterne bladre i de indtastede forskrifter, og den aktive graf vil blive fremhævet og forskriften vist (Prøv!). Du kan også bladre i historikken ved at klikke på ikonet



Endelig kan du fremkalde forskriften ved at dobbeltklikke på grafen.

**Tip**

Du kan skjule eller fjerne en etiket ved at højre-klikke på etiketten og vælge Vis/Skjul eller Fjern i menuen. Hvis du slet ikke vil have vist etiketter, så kan du i Indstillinger i Grafer og Geometri-menuen fravælge disse.

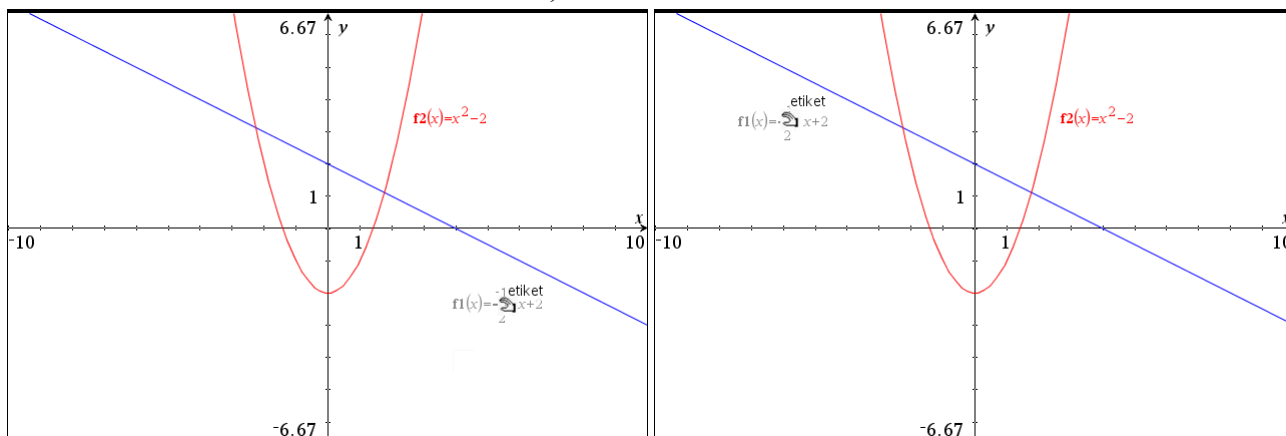
Herefter får du i graffeltet vist en aktiv markør, der kan optræde i flere forskellige former fx




— og vise meddelelser og visuelle effekter alt efter, hvad markøren aktuelt peger på.

Hvis du fx vil have flyttet en etiket ved en graf, så flytter du markøren hen til etiketten, så pilen ændres til en åben hånd og teksten 'etiket' kommer til syne. Hold musen nede og træk med musen, så skifter hånden udseende og bliver til en gribende hånd.

Træk etiketten derhen, hvor du vil have den:



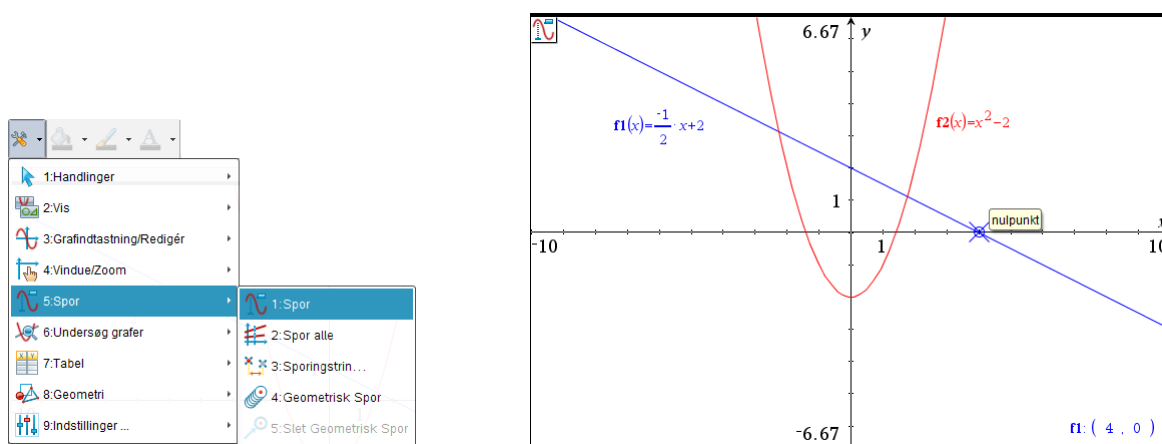
2. Spor graferne

I Dokumentværktøjer for Grafer vælger du  5:Spor ▶ 1:Spor.

Obs

Læg mærke til, at du bliver gjort opmærksom på interessante punkter under sporingen.

Du kan flytte sigtekornet frem og tilbage på linjen vha. piletasterne og samtidig følge sigtekornets aktuelle koordinater på nederst på skærmen. Med et tryk på PilOp (eller PilNed) kan du binde sigtekornet til parablen, og du kan nu flytte sigtekornet frem og tilbage på parablen vha. piletasterne.

**Obs**


Med sporing aktiveret kan du taste en x -værdi på tastaturet, og når du trykker Enter, hopper du til det punkt på grafen, der har denne x -værdi (og får samtidig y -værdien vist).

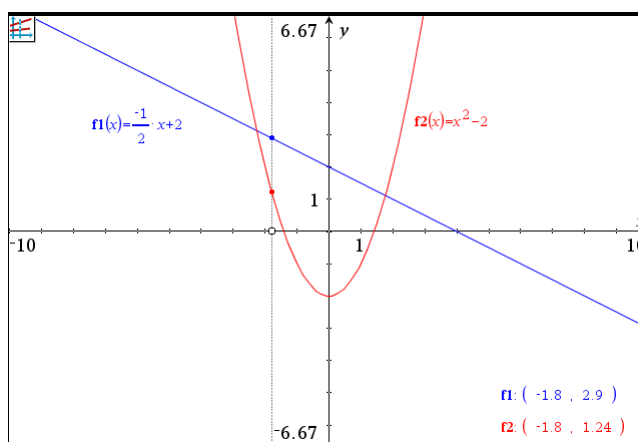
Tip

Ikonet



I øverste venstre hjørne af skærmen viser at Spor alle er aktiveret.

Du kan spore begge grafer samtidig ved at vælge  5:Spor ▶ 2:Spor Alle. Her bindes sigtekornet til x -aksen, og du kan nu flytte sigtekornet frem og tilbage på x -aksen vha. piletasterne, og samtidig følge grafpunkternes aktuelle koordinater på skærmen.



Med sporing kan du også aflæse nogle tilnærmede koordinater for skæringspunkterne. Forlad sporing ved at trykke på ESC.


3. Find skæringspunkterne mellem graferne grafisk/symbolsk

Tip

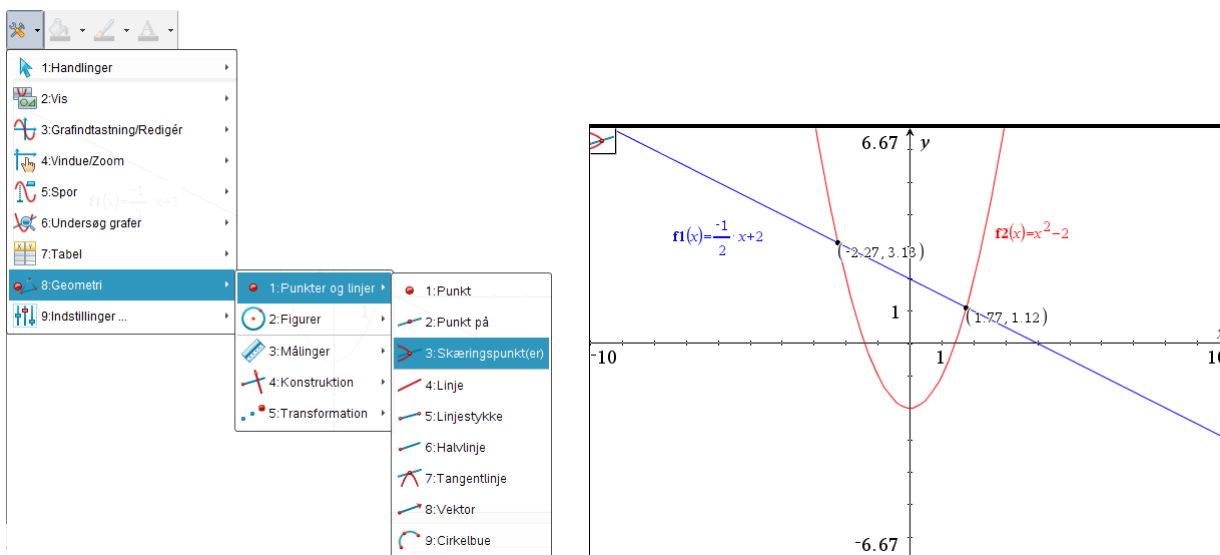
Holder du musen hen over ikonet i øverste venstre hjørne vises der en forklaring på hvordan værktøjet bruges:

Skæringspunkt(er):
Klik på det første objekt og dernæst på det andet objekt.

Først finder vi skæringspunkterne grafisk. Vælg i Dokumentværktøjer

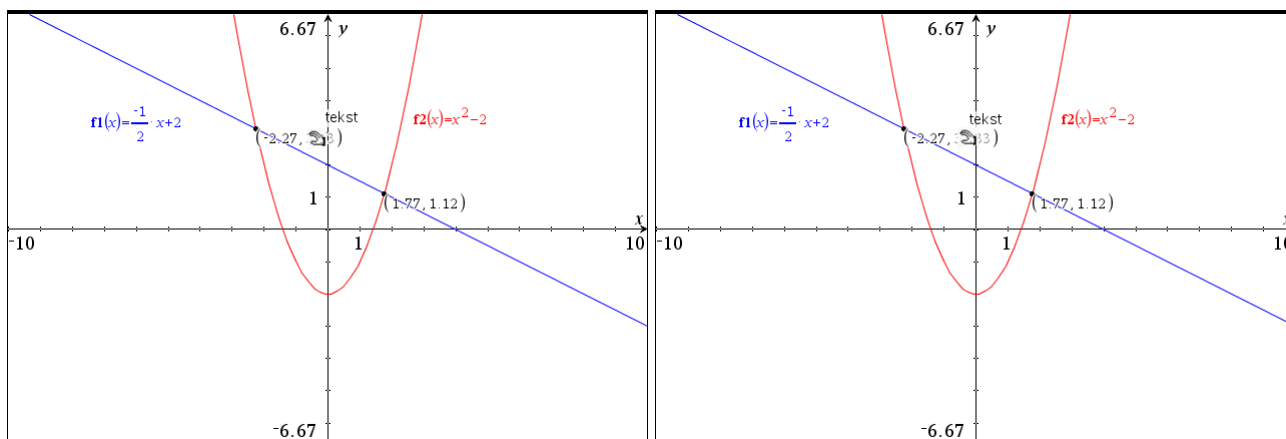
 8:Geometri ▶ 1:Punkter og linjer ▶ 3:Skæringspunkt(er).

Flyt markøren hen til en af graferne. Når markøren ændrer udseende til en pegende hånd, klikker du på grafen. Den udpegede graf blinker nu. Udpeg den anden graf tilsvarende, og straks efter vises skæringspunkterne:



Skæringspunkterne kan vises — afhængig af maskinens indstilling — med 3 cifre.

Vil du ændre antallet af decimaler, så placerer du markøren over tallet, du vil ændre, og trykker + tasten for at få flere decimaler med, – tasten for at få færre. Du skal forlade det aktuelle værktøj ved at taste ESC inden du kan ændre antal decimaler. Nedenfor ændres antallet af decimaler på y-kordinaten 3.13 – fra 3.1 (tast –) til 3.133 (tast + +):



Tip

Du kan nemt *trække* koordinaterne til en position, hvor de ikke ligger oven i grafen.

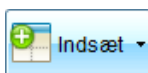
Når du er færdig, flytter du blot musen. Lav tilsvarende ændringer for de øvrige koordinater, og flyt dem om nødvendigt, så det hele står pænt.

Tip

Ctrl/Cmd I bringer dig direkte til værktødslisten.

Så finder vi skæringspunkterne symbolsk. Før du kan lave symbolske beregninger, skal du have føjet et Beregnings-værksted til dit dokument:

Tryk på ikonet for indsæt ny side, og vælg Beregninger.



Hvis du har Sidesorterer vist i sidepanelet (ellers klik på knappen), kan du se, at der nu er to miniaturer til venstre på din skærm. Miniature 1 er dit Graf-værksted, miniature 2 er det Beregnings-værksted, du lige har tilføjet. Begge sider er en del af Opgave 1.

Obs

På en MAC findes | -tegnet ikke direkte på tastaturet og den sædvanlige genvej virker ikke i TI-Nspire CAS, så | -tegnet må hentes fra tegnoversigten i sidepanelet!

Idet de to funktioner er indtastet som hhv. $f_1(x)$ og $f_2(x)$ i Graf-værkstedet, kan du bestemme skæringspunkterne symbolsk ved at indtaste $\text{solve}(f_1(x)=f_2(x),x)$. Dette giver dig de to skæringspunkters x -koordinater.

De tilhørende y -koordinater kan du finde ved at indsætte x -koordinaterne i en af forskrifterne én ad gangen:

Skriv $f_1(x)$ i indtastningslinjen. Hent en af løsningerne i historikområdet, og beregn y -værdien. Tilsvarende med den anden løsning.

Tip:

Marker den del af løsning, du vil hente, og tast Enter - eller grib markeringen og træk det til indtastningslinjen - eller tryk Ctrl/Cmd C for at kopiere og Ctrl/Cmd V for at indsætte (højre-klik kan også bruges her).

The screenshot shows the TI-Nspire CAS interface. On the left, a graph window displays two parabolas, $f_1(x)$ and $f_2(x)$, intersecting at two points. The intersection points are labeled with their coordinates. On the right, a calculation window shows the command $\text{solve}(f_1(x)=f_2(x),x)$ and the resulting solutions for x : $x = \frac{-(\sqrt{65}+1)}{4}$ or $x = \frac{\sqrt{65}-1}{4}$. Below this, the corresponding y -values for $f_1(x)$ and $f_2(x)$ are calculated at these x -values.

Nyt eksempel og flere grafværktøjer

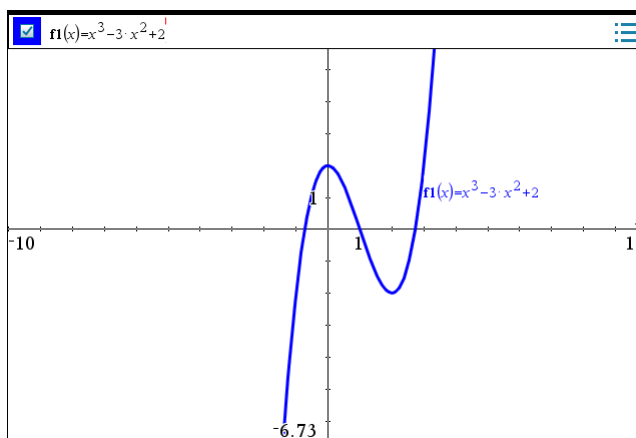
Tegn grafen for funktionen $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- 1) Bestem funktionsværdierne $p(3)$ og $p(7)$.
- 2) Bestem funktionens nulpunkter og lokale ekstremer.

Opret et nyt dokument med et Graf-værksted og indskriv funktionen som $f_1(x)$

Husk

Du kan oprette et nyt dokument ved at taste SHIFT ALT Ctrl/Cmd N (for at få sidestørrelse computer) og derefter vælge det værksted, du vil starte i.

**1. Manuel indstilling af grafvinduet**

Du kan få en pænere graf ved at indskrænke vinduet. Her skal du benytte et vindue, hvor x løber fra -5 til 5, og y løber fra -5 til 5.

Obs

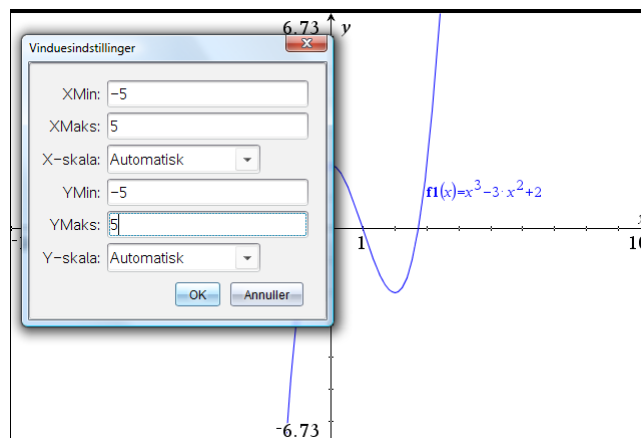
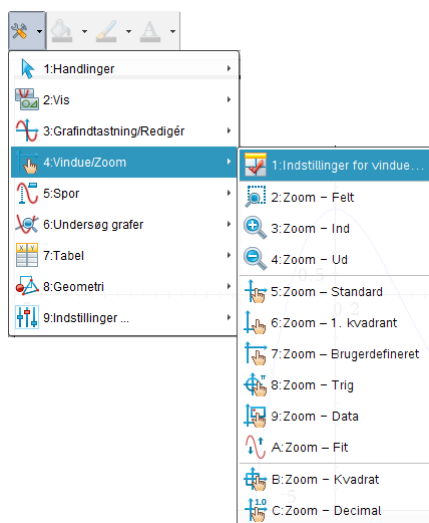
Du hopper fra felt til felt i dialogen vinduesindstillinger med TAB - tasten.

Vælg



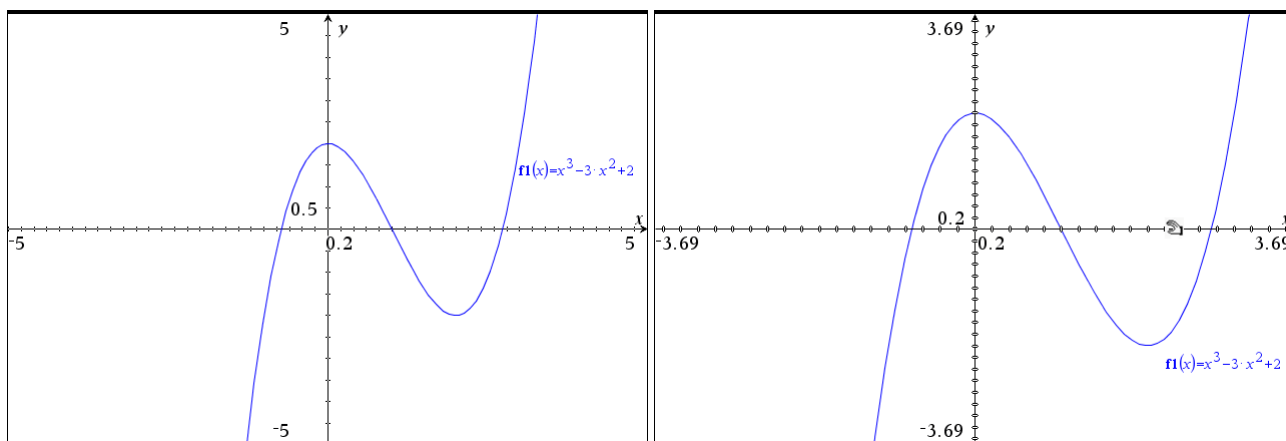
4: Vindue/Zoom ▶ Indstillinger for vindue..,

og indstil vinduet som vist til højre

**Tip**

Du kan også ændre vinduesgrænserne direkte i grafområdet ved at skrive direkte i felterne for aksernes start- og slutværdier og springe fra vinduesgrænse til vinduesgrænse med TAB.

tryk OK, og grafen ser herefter således ud:



Der er en tredje mulighed for ændring af akseindstillinger:

Obs
Holdes SHIFT nede, mens du trækker i en akse, er det kun denne akse der ændres.

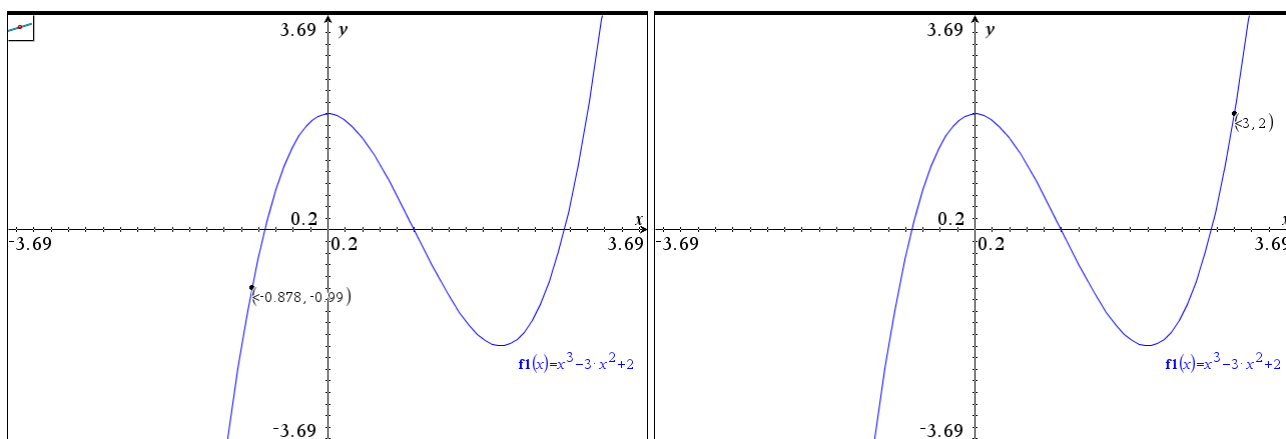
Placer markøren ved en af aksemærkerne. Når markøren ændrer udseende til en åben hånd (højre skærbillede ovenfor), griber med musen. Du kan nu ændre akseindstillingerne ved at trække aksemærket.

2. Funktionsværdier med Punktværktøj/Beregninger og Tabel

Vi lægger ud med at aflæse funktionsværdierne. Funktionsværdien i 3 kan dårligt aflæses på grafen (og i 7 slet ikke), men prøv med punktværktøjet: Vælg

 8:Geometri ▶ 1: Punkter og linjer ▶ 2:Punkt på,

og afsæt et punkt på grafen. Når du forlader punktværktøjet (med ESC), kan du redigere punktets koordinater (også y-koordinaten!), og når du taster Enter, hopper punktet til de nye koordinater



Obs
Husk, at du kan fortryde et valg med fortryd-knappen




Prøv dernæst at indtaste 7 efterfulgt af Enter og se, hvad der sker ☺

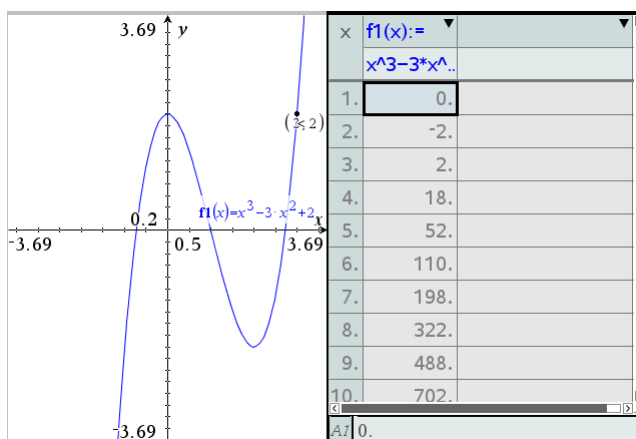
Vi prøver nu at finde funktionsværdierne i en funktionstabel.

Tip

Genvejen til tabellen er Ctrl/Cmd T

Det er meget simpelt at få lavet en tabel (et sildeben) over funktioner.

Vælg  7: Tabel. Skærmen opdeles i to ruder: En til funktionsgrafen, og en til tabellen. I tabellen kan du se, at $p(3) = 2$ og at $p(7) = 198$.

**Tip**

Du skifter fokus ved at klikke med musen i den rude, du vil have i fokus.

På skærbilledet ovenfor er der en tyk ramme om tabellen. Det betyder, at tabellen er i fokus og at det er værktøjerne for tabellen der vises i sidepanelet. Hvis du vil have ændret indstillingerne i tabellen, vælger du

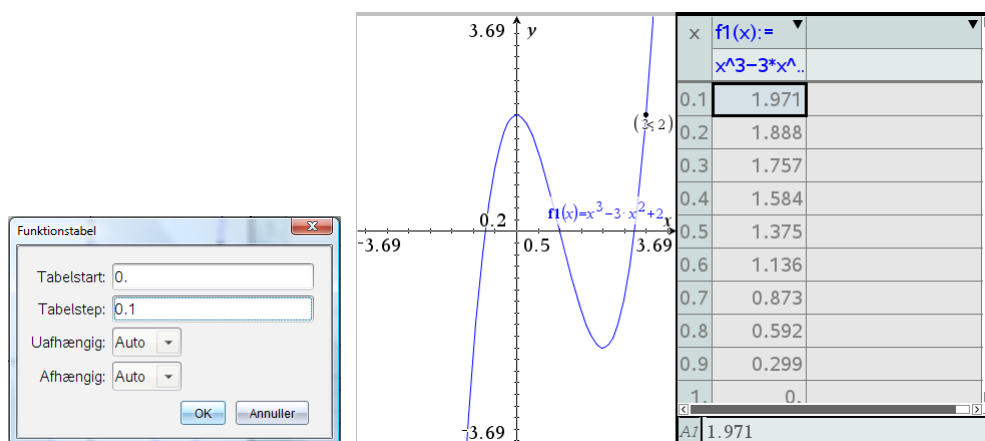


2:Funktionstabel ▶ 5:Rediger funktionsindstillinger.

Indstiller du som vist på skærbilledet, så vil du få en tabel med spring på 0.1

Husk

Du benytter TAB til at hoppe mellem knapper og felter i dialogbokse.

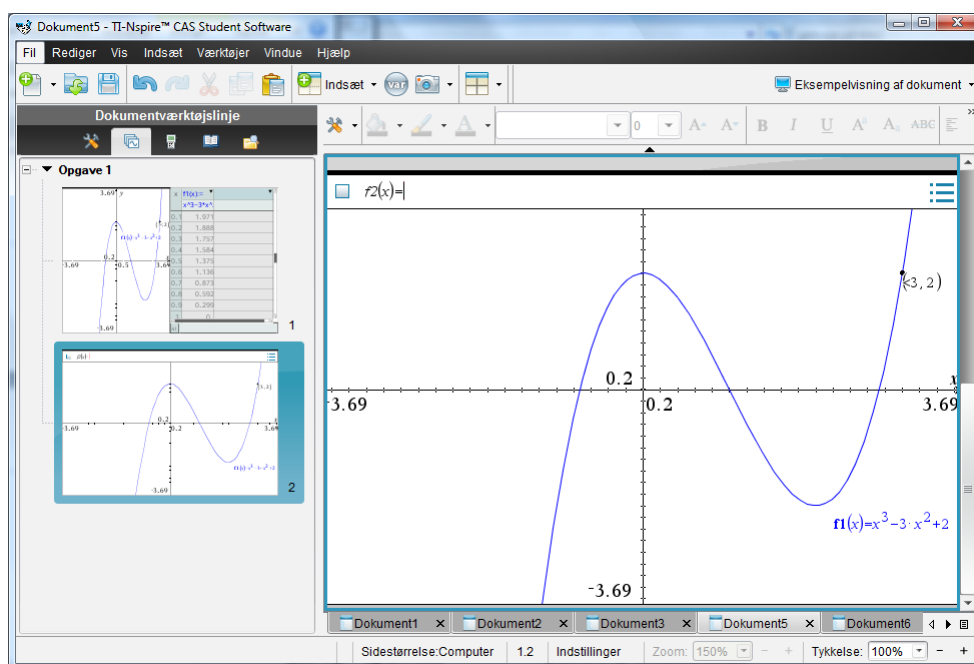


Hvis du vil beholde grafen og tabellen som en del af dit arbejde, men kunne arbejde videre med grafen uden tabel, så kan du tage en kopi af Graf-værkstedet, og sætte det ind som et nyt værksted. Metoden er denne:

Obs

På en MAC skal en ny side først aktiveres, før du kan indsætte et værksted. Fx kan du klikke på sideminiaturen i sidepanelet.

Sørg for, at Graf-værkstedet er i fokus (tyk ramme om grafen). Klik foroven på den tykke ramme (bjælken). Dette får den tykke ramme til at blinke, og du kan nu kopiere din graf med Ctrl/Cmd C. Indsæt en ny side fx med Ctrl/Cmd I, men undlad at vælge et værksted! Tilbage er blot at indsætte grafen med Ctrl/Cmd V ☺



Til sidst beregner vi funktionsværdierne 😊

Tip

CTRL/Cmd I bringer dig direkte til værktøjslisten.

Før du kan lave beregninger, skal du have føjet et Beregnings-værksted til dit dokument.

Den beregning, der skal udføres, kan kort formuleres som $f1(3)$, idet du har givet funktionen p navnet $f1$ ved at indtaste forskriften for p som den første forskrift i graf-feltet. Du kan overbevise dig om dette ved at skrive $f1(x)$:

Obs

Skriver du blot $f1$ og ikke $f1(x)$, får du fejlmeddelelsen "Argumentfejl". Du skal altså altid huske at have argumentet med.

$f1(x)$	$x^3 - 3 \cdot x^2 + 2$
$f1(3)$	2
$f1(7)$	198

Tip

Hvis du vil have tegnet grafen for p , kan du blot skrive navnet $p(x)$ ind i graf-feltet. Naturligvis får p så også navnet $f1$ (hvis det er den første indtastede graffunktion).

Det ville være mere elegant, hvis man blot kunne skrive $p(3)$ og $p(7)$, da funktionens navn er p . Men det er der råd for:

Du kan definere funktionen p direkte ved at skrive: $p(x) := x^3 - 3x^2 + 2$. Læg mærke til at der hører et kolon til lige før lighedstegnet! Herefter giver det mening af udregne $p(3)$ og $p(7)$

$f(x)$	$x^3 - 3 \cdot x^2 + 2$
$f(3)$	2
$f(7)$	198
$p(x) := x^3 - 3 \cdot x^2 + 2$	Udført
$p(3)$	2
$p(7)$	198

3. Nulpunktsbestemmelse grafisk/symbolsk

Tip


Nulpunktsbestemmelsen kan også foretages med Sporingsværktøjet, der også viser interessepunkter.

Vi lægger ud med at finde nulpunkterne grafisk. Vi skal bestemme det nulpunkt for p , der ligger i intervallet $[-1,0]$. Hvis du ikke allerede har grafen på din skærm, så skift til Graf-værkstedet.

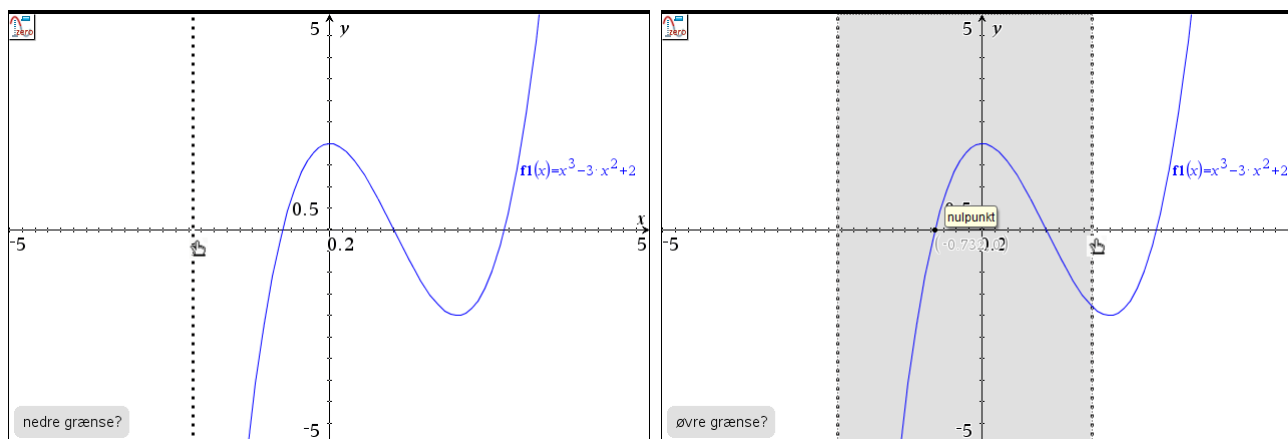
Obs

Hvis der er flere grafer, skal du først udpege den graf, du vil undersøge.

Vælg værktøjet:

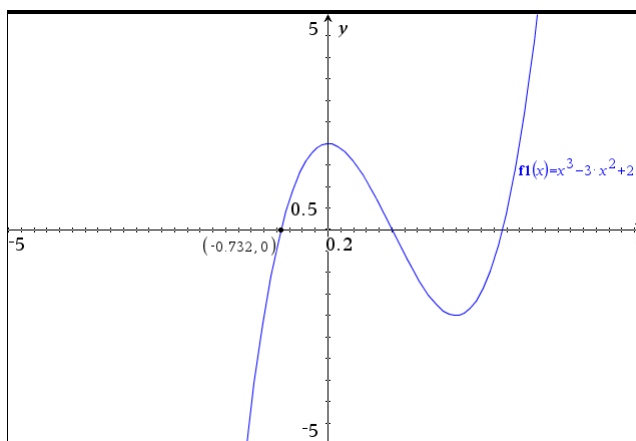
 6:Undersøg grafer ▶ 1:Nul.

Først skal du udpege venstre endepunkt af det interval, du vil bestemme et nulpunkt i, så klik til venstre for nulpunktet:



Helt tilsvarende udpeges det højre endepunkt af søgeintervallet. Så snart markøren passerer forbi nulpunktet, vil en etiket poppe op og fortælle dig, at et nulpunkt er fundet.

Klik, og nulpunktet og værdien vises som et punkt på grafen:



Tryk **Enter**, og juster antallet af decimaler, fx ved at højreklikke og vælge attributter. Nulpunktet aflæses til -0.732051 . Tilsvarende bestemmes de andre nulpunkter.

Så finder vi nulpunkterne symbolsk

Du kan naturligvis også foretage en symbolsk bestemmelse af det nulpunkt for p , der ligger i intervallet $[-1, 0]$. Skift til **Beregnings-værkstedet** og brug værktøjet

X= 3:Algebra ▶ 4:Find nulpunkter

Obs

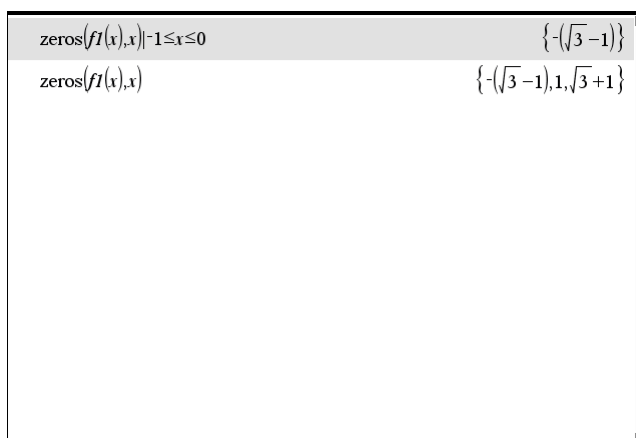
Denne opgave kan naturligvis også løses med **solve**. Den eneste forskel er den måde, hvorpå løsningen vises.

Den færdige indtastningslinje skal se således ud: $\text{zeros}(f1(x), x) | -1 \leq x \leq 0$

Hvis du vil finde alle nulpunkter, så dropper du blot betingelsen $-1 \leq x \leq 0$. Læg mærke til, at i begge tilfælde får du resultatet som en *liste* — dvs. med krøllede parenteser omkring:

Tip

Du laver nemmest tegnene \leq og \geq vha. genvejene \leq og \geq . De findes også i Tegnfanen i sidepanelet.



4. Minimum og maksimum grafisk/symbolsk

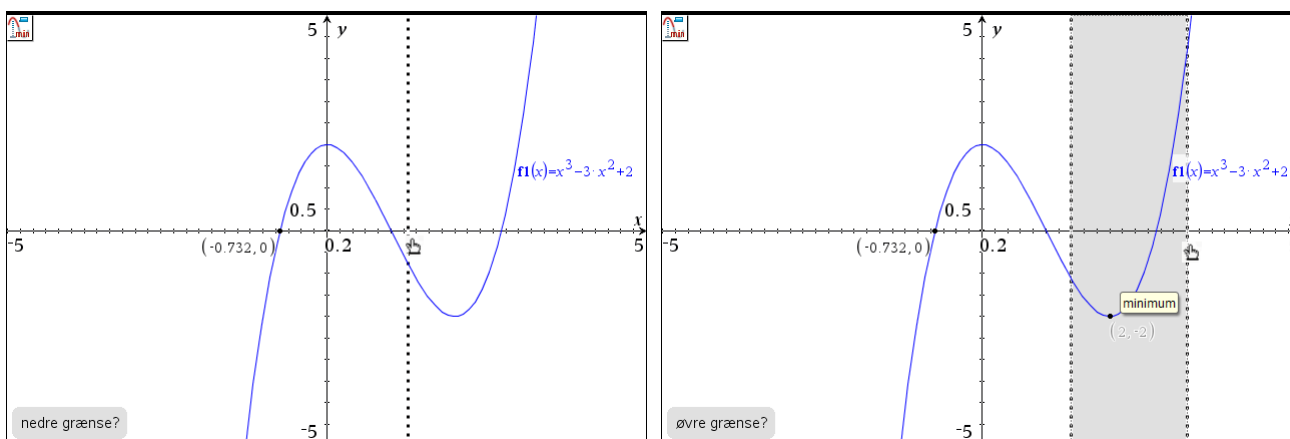
Du skal nu finde det lokale minimum, funktionen har i nærheden af 2. Hertil kan du benytte værktøjet:

 6:Undersøg grafer ▶ 2:Minimum.

Obs

Hvis der er flere grafer, skal du først udpege den graf, du vil undersøge.

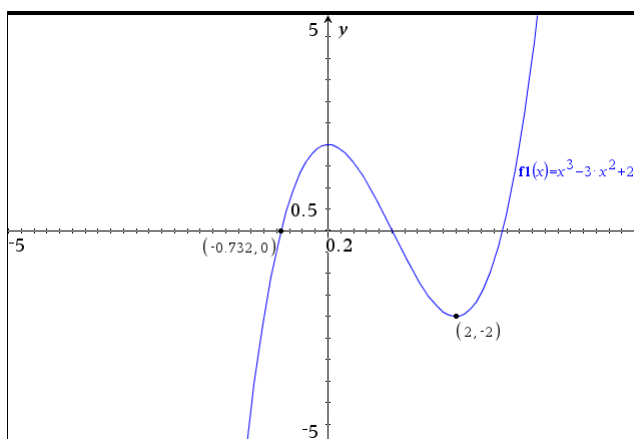
Først skal du udpege venstre endepunkt af det interval, du vil bestemme minimum i, så klik til venstre for minimumspunktet:



Helt tilsvarende udpeges det højre endepunkt af søgeintervallet. Så snart markøren passerer forbi minimumspunktet, vil en etiket poppe op og fortælle dig, at et minimum er fundet. Klik, og minimumspunktet og værdien vises som et punkt på grafen:

Tip

Vil du ændre antallet af decimaler, så placerer du markøren over tallet, du vil ændre, og trykker + tasten for at få flere decimaler med, -tasten for at få færre.



Prøv selv at bestemme det lokale maksimum. Dette får du ikke nødvendigvis angivet som $(0,2)$, men fx som $(1.74E-7,2)$ — afhængig af det valgte søgeinterval. Ved at ændre antallet af viste decimaler kan du få det lokale maksimum angivet som $(0.,2)$, hvor punktum efter 0 viser, at værdien ikke er eksakt 0. Husk på, at Graf-værkstedet arbejder med en numerisk løsningsmetode. Skal det være en eksakt bestemmelse, så må du en tur i Beregnings-værkstedet.

Så finder vi ekstremumpunkterne symbolsk. Du kan lave en eksakt bestemmelse af minimum og maksimum i Beregnings-værkstedet. Hertil skal du benytte værktøjet

4:Differential og integralregning ▶ 7:Funktionsminimum

For at bestemme det minimum, der ligger i intervallet $]1,3[$, indtastes derfor kommandoen: $fMin(f1(x),x)|1 < x < 3$

$zeros(f1(x),x) -1 \leq x \leq 0$	$\{-\sqrt{3}-1\}$
$zeros(f1(x),x)$	$\{-\sqrt{3}-1, 1, \sqrt{3}+1\}$
$fMin(f1(x),x) 1 < x < 3$	$x=2$
$f1(2)$	-2

Funktion givet ved en tuborg-forskrift

Tegn grafen for funktionen

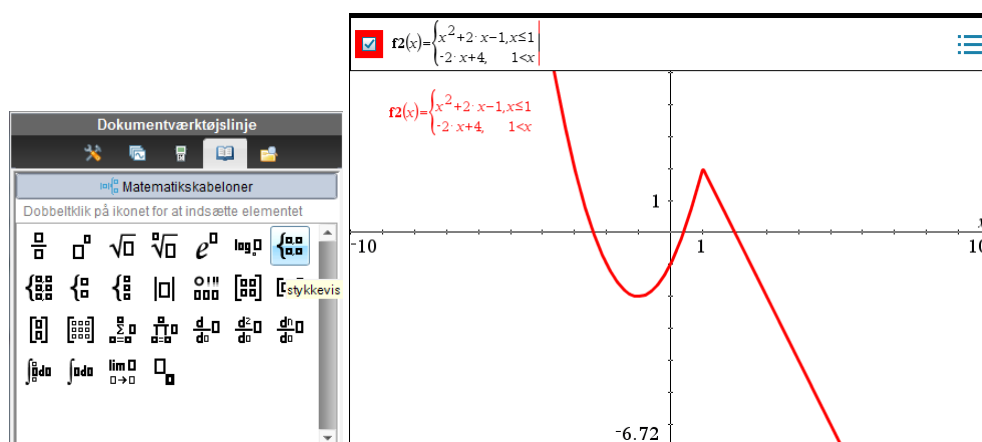
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{for } x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$

og løs ligningen $f(x) = 1$.

Gå til indtastningsfeltet i Graf-værkstedet, og skriv forskriften ind i $f2$, idet du bruger skabelonen for tuborg-forskrifter, som du finder i fanen Matematikskabeloner i sidepanelet under Hjælpeprogrammer:

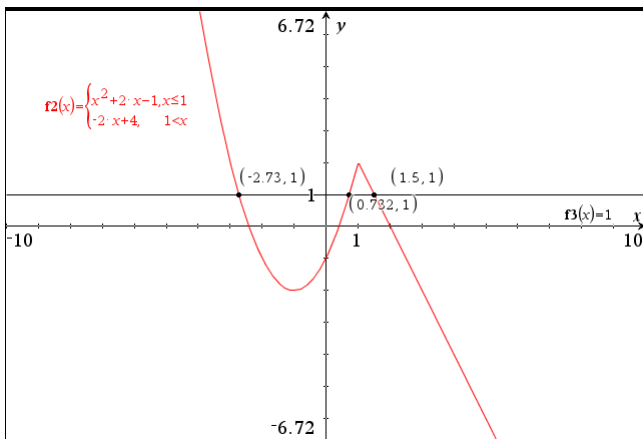
Tip

Du laver nemmest tegnene \leq og \geq vha. tastekombinationerne \leq og \geq . De findes også i Tegn-fanen i Sidepanelet.



Ligningen løses let vha. grafværktøjerne, når først $f3(x)=1$ er indtastet. Her er det vist med skæringsværktøjet fra Geometri-menuen. Men ligningen kan selvfølgelig også løses symbolsk:

2: Grafer



solve($f_2(x)=1,x$)

$$x = -(\sqrt{3} + 1) \text{ or } x = \sqrt{3} - 1 \text{ or } x = \frac{3}{2}$$

3



Geometriværkstedet

Geometriske konstruktioner

Her og i de kommende afsnit skal du lave en række geometriske konstruktioner.

For at se, hvordan dette virker, skal du nu konstruere midtnormalerne i en trekant, fastlægge midtnormalernes skæringspunkt og benytte dette punkt til at konstruere trekantens omskrevne cirkel. Konstruktionen foregår i plangeometrisk visning — dvs. uden koordinatsystem.


Opret et nyt dokument og indsæt et Geometri-værksted. Arbejdsområdet vil være blankt — dog med angivelse af en skalaenhed i øverste højre hjørne. Denne er som standard sat til 1 cm (men den kan ændres til andre størrelser og andre enheder).



Vælg værktøjet



5:Figurer ▶ 2:Trekant.

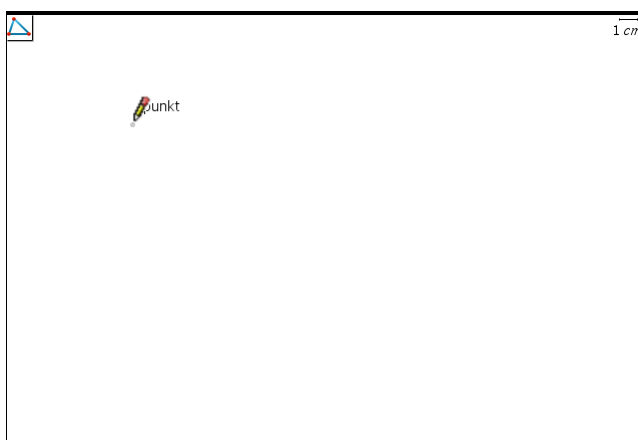
Markøren ændres til en blyant  med et blinkende punkt.

Obs

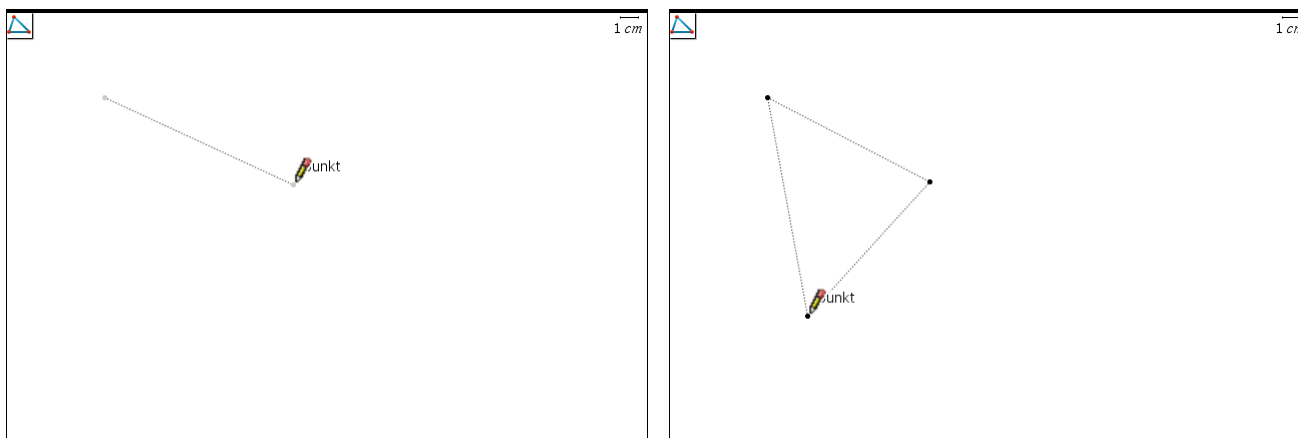
Ikonen i øverste venstre hjørne viser, at trekantsværktøjet



er det aktuelle værktøj. Værktøjet forlades når et nyt vælges, eller når du taster ESC.



For at tegne en trekant, skal du afsætte tre punkter i geometriske plan. Placer markøren, hvor du vil afsætte det første punkt, og klik. Når du flytter blyanten hen til det næste punkt, vil du se en stiplede linje mellem det afsatte punkt og det nye. Når du er nået til den ønskede placering, klikker du. Det sidste punkt afsætter du på samme måde:



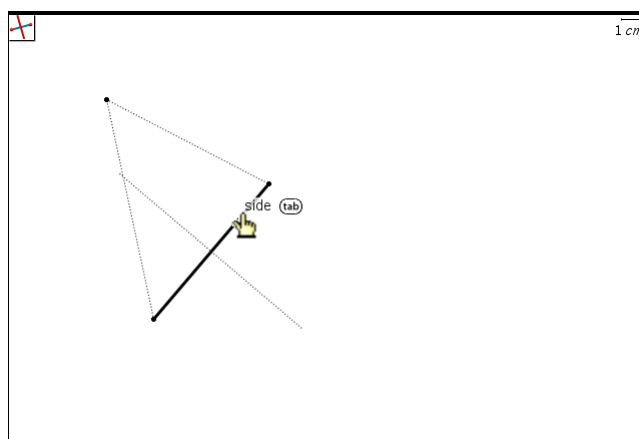
Så skal midnormalerne konstrueres: Vælg

 7:Konstruktion ▶ 3:Midtnormal.

Obs

Etiketten *side* viser, at det er en side i trekanten, du peger på. Ved mere komplicerede konstruktioner kan det være svært at udpege det ønskede objekt. Med TAB kan du skifte mellem objekterne.

Til afsættelse af en midtnormal behøver du kun at udpege en af trekantens sider. Så snart markøren rammer en af siderne, ændres markøren til en pegende hånd, og midtnormalen vises som en stiplede linje:



Obs

Når en linje udpeges bliver linjen tyk. Når du vælger linjen (ved at klikke), så bliver linjen tynd.

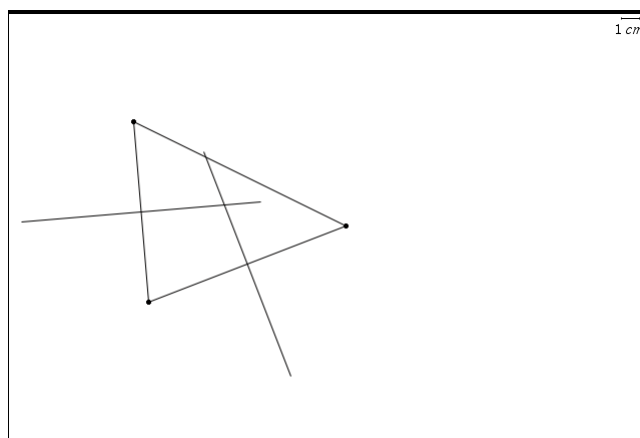
Klik for at fæstne midtnormalen. Værktøjet til konstruktion af midtnormal forbliver aktivt indtil du vælger et nyt værktøj (eller taster ESC). Så for at konstruere midtnormalen på en af de andre sider behøver du blot at klikke på ønskede side i trekanten. Gør det!

Nu skal skæringspunktet mellem de to midnormaler konstrueres:

Vælg

 4:Punkter og Linjer ▶ 3:Skæringspunkt(er).

Klik på de to linjer (dvs. midnormalerne) én efter én, og skæringspunktet fastlægges.



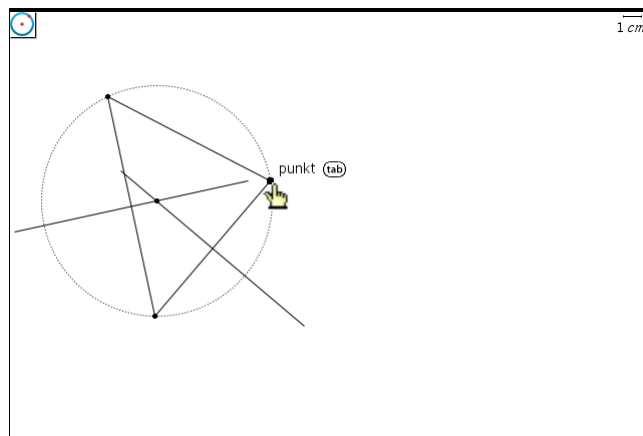
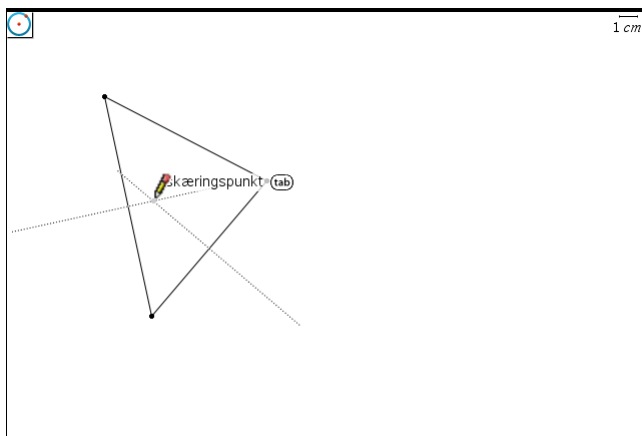
Med udgangspunkt i dette skæringspunkt skal du nu konstruere en cirkel med centrum i dette punkt og radius fastlagt som afstanden fra centrum til en af vinkelspidserne. Vælg cirkelværktøjet med



5:Figurer ▶ 1:Cirkel

Først fører du markøren hen til midtnormalernes skæringspunkt — skæringspunktet skal blive fremhævet og etiketten *skæringspunkt* skal vises (venstre skærbillede). Klik så, for at fastlægge centrum.

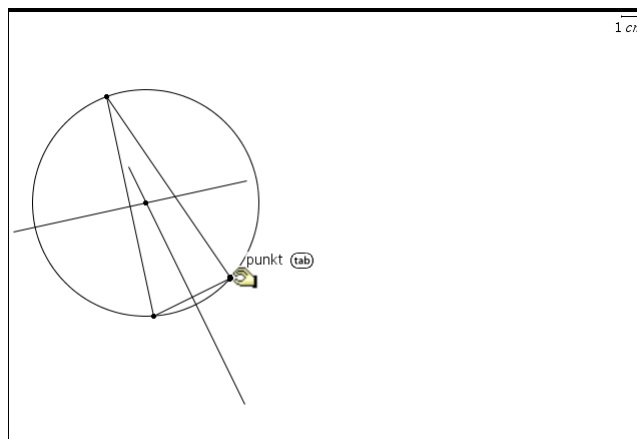
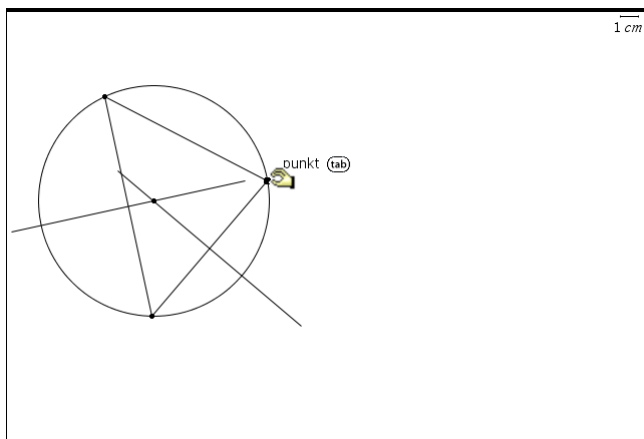
Flyt nu markøren til en af vinkelspidserne — igen skal punktet være fremhævet og etiketten *punkt* skal vises (højre skærbillede). En stiplede cirkel antyder, hvordan resultatet kommer til at se ud. Klik for at fastlægge radius.



For denne trekant ser det ud til, at den cirkel, du har tegnet, går gennem alle vinkelspidser. For visuelt at tjekke, om dette er tilfældet for andre trekanter, kan du med TI-Nspire CAS dynamisk ændre trekanten, så hele konstruktionen opdateres:

Forlad cirkelværktøjet ved at taste **ESC**. Før markøren hen til en af vinkelspidserne, og sørg for, at markøren er en åben hånd og etiketten *punkt* vises.

Grib punktet, og træk det til en anden placering. Læg mærke til, at figuren opdateres løbende under deformationen.



Du kan bygge videre på konstruktionen ved fx at konstruere trekantens indskrevne cirkel. Inden du går i gang med dette, er det en god ide at skjule midtnormalerne, der jo kun tjener som konstruktionslinjer. Det gør du således:

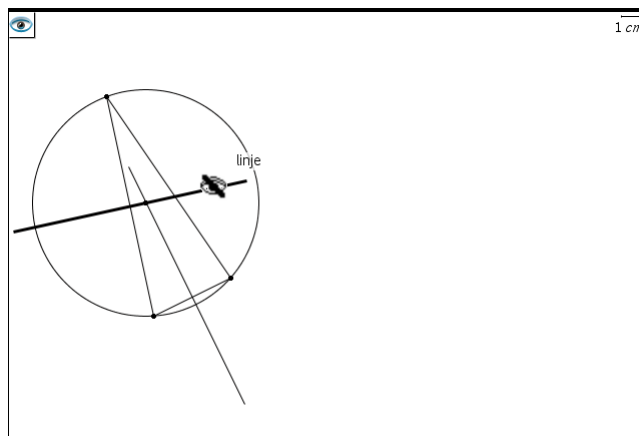
Obs

For at skjule et objekt kan du også højreklikke på objektet og vælge Skjul i kontekstmenuen.

Vælg

 1:Handlinger ▶ Vis/Skjul.

Flyt markøren hen på en af midtnormalerne, så markøren ændres til et 'overstreget øje' og klik så. Herved bliver midtnormalen næsten usynlig. Gør det samme med den anden midtnormal. Når du forlader Vis/Skjul-værktøjet (tast ESC), så er midtnormalerne usynlige.

**Tip**

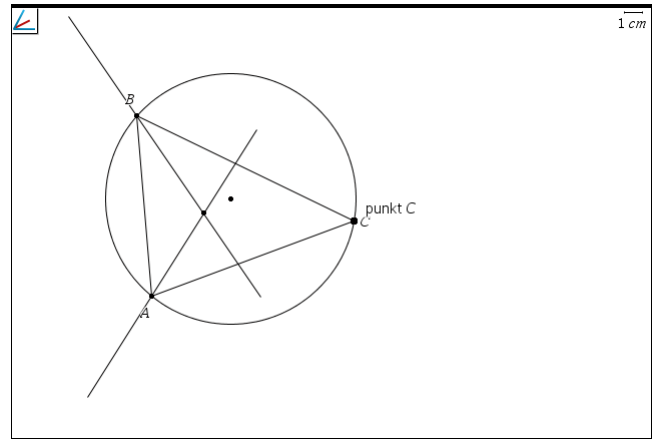
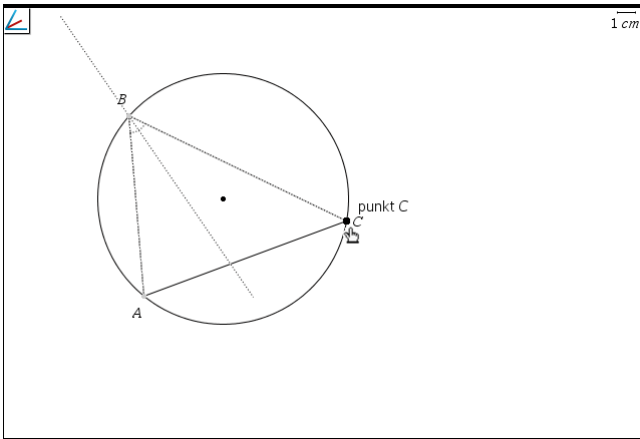
Dette er nemmest at navngive punkter samtidig med at de afsættes: Tast blot navnet umiddelbart efter punktet er placeret. Ved navngivning senere højreklikker du, og vælger Navngiv.

Centrum for den indskrevne cirkel konstrueres som vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt. Værktøjet finder du her:

 7:Konstruktion ▶ 4:Vinkelhalveringslinje.

I nedenstående skærbillede er vinkelspidserne navngivet for at lette beskrivelsen af, hvordan udpegning af en vinkel foregår: Hvis du vil tegne vinkelhalveringslinjen fra $\angle B$, så udpeger du vinklen ved at udpege punkterne A, B, C i denne rækkefølge (eller C, B, A).

Det højre skærbillede viser to vinkelhalveringslinjer med skæringspunktet konstrueret.

**Husk**

at når du udpeger et punkt, så skal markøren være en pegende hånd og etiketten *punkt* skal vises.

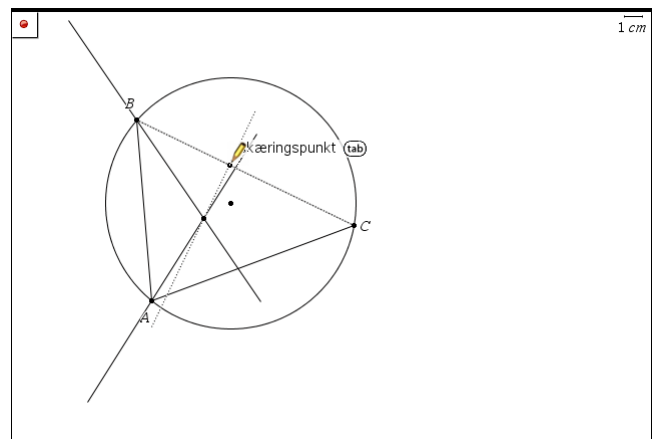
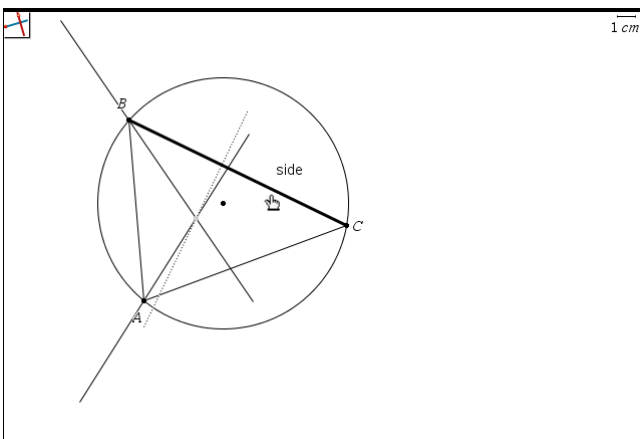
Tilbage er blot at bestemme et punkt på periferien af den indskrevne cirkel. Da trekantens sider er tangenter til den indskrevne cirkel, kan du konstruere tangeringspunktet ved at konstruere en linje gennem centrum og vinkelret på en af siderne:

Vælg

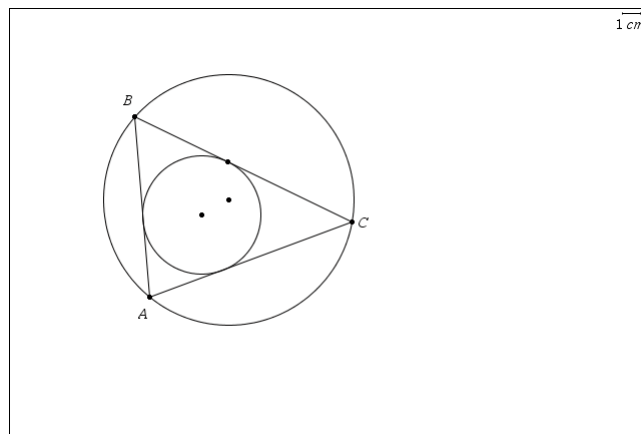


7:Konstruktion ▶ 1:Vinkelret,

og udpeg en af siderne og centrum:



På det højre skærbillede er skæringspunktet mellem den konstruerede vinkelrette linje og siden BC konstrueret. Skjul alle konstruktionslinjer, og konstruer den indskrevne cirkel ved at bruge cirkelværktøjet og udpeg centrum og tangeringspunkt



Grib fat i en af trekantens vinkelspidser og deformer figuren. Tjek, at alt virker!

Udsmykning i Geometri

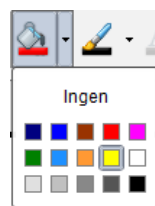
Hidtil har vi bare tegnet med sort streg og anvendt standardtypografier. Men der er forskellige muligheder for pynte på konstruktionen. Dels er der formatbjælken lige over vinduet, hvor vi bl.a. har adgang til at farvelægge figuren. Dels kan man lege med figureernes attributter (kendetegn).

Når man farvelægger det indre af figurer skal man være opmærksom på at de farvede lag lægges oven på hinanden, så de øverste lag skjuler de inderste. Her gælder nu princippet, at

Nye figurer ligger altid oven på de gamle!

Skal man farvelægge trekanten med dens omskrevne og indskrevne cirkel, skal trekanten derfor tegnes *efter* man har tegnet den omskrevne cirkel, men *før* man har tegnet den indskrevne cirkel! Man kan da enten vende konstruktionen på hovedet og tegne cirklen først, eller man kan vente med at tegne trekanten *som trekant*, indtil den omskrevne cirkel er konstrueret. Dvs. først tegnes trekanten som linjestykker og derefter som trekant, når man er kommet så langt 😊

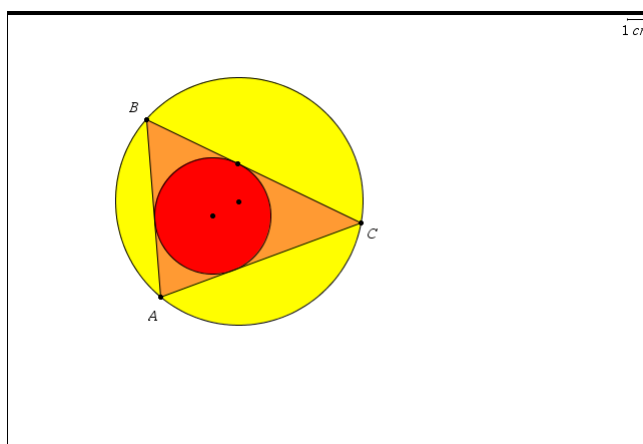
Man farvelægger nu den omskrevne cirkel ved at klikke på den og vælger den gule farve



Obs

Husk at når man klikker på flere figurer efter hinanden bliver de alle valgt. For at *fravælge* en tidligere figur skal man derfor klikke i et tomt område af tegnepladen.

Derefter klikker man udenfor figurene og klikker på trekanten, der farves orange, og tilsvarende klikker man udenfor figurene og farver den indskrevne cirkel rød.

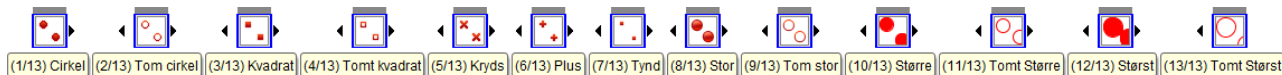


Vi kan så tilsvarende farvelægge punkterne i trekanten, ligesom vi kan fremhæve de to cirklers centre. Endelig kan vi fremhæve trekanten ved at opfede siderne. Når vi højreklikker på trekanten og vælger attributter får vi adgang til at ændre linjetykkelse og linjestyk

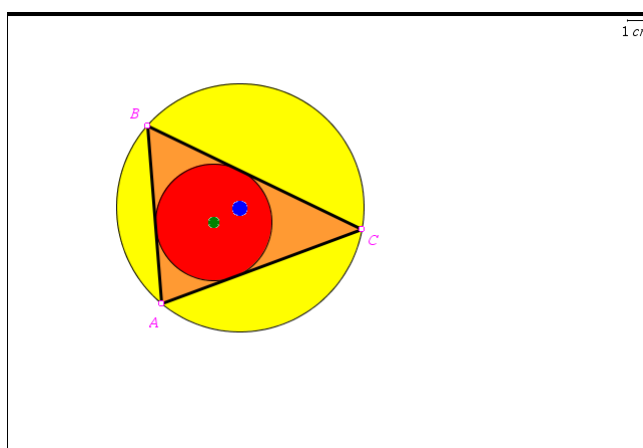


(2/3) Stregbredden er medium

Når vi tilsvarende højreklikker på et punkt og vælger attributter får vi adgang til at ændre punktstil i det vi kan vælge mellem 13 forskellige udseender:



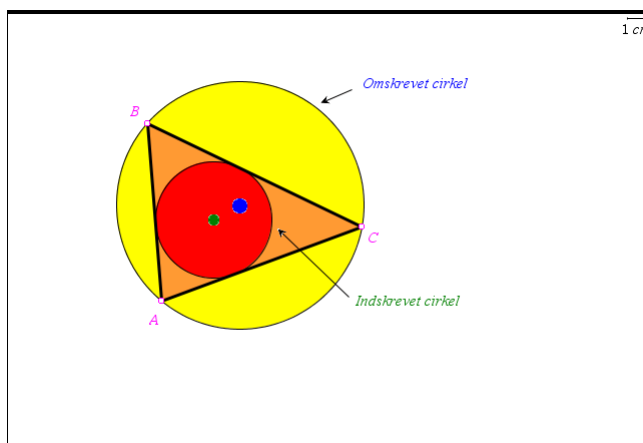
Der er altså rigelige muligheder for at fremhæve særlige punkter. Læg i sær mærke til at man kan spille på størrelsen af punkterne, idet de nu kommer i fem forskellige størrelser!



Læg mærke til at navnene på hjørnepunkterne følger punkternes farve.

Vi kan også indføre forklarende tekstbokse, men kun én linje ad gangen. De egner sig derfor ikke til lange forklarende tekster 😊.

Vi kan fx tilføje teksterne 'Indskreven cirkel' og 'Omskrevet cirkel' og lade den pege på cirklerne ved hjælp af vektorstrege (pile), der hentes i Punkter og linje-menuen:



Farverne i tekstboksene er sat som linjefarver med Betingelser, idet der ikke umiddelbart er adgang til at formatere teksten i tekstboksene. Højreklik i tekstboks og vælg **Betingelser** og indstil linjefarven med det relevante nummer, der derefter bliver vist betingelsesløst 😊

Konstruktion af målfast figur

I trekant ABC er $\angle A = 35^\circ$, $b = 5$ cm og $a = 6$ cm.

1. Tegn en model af trekanten
2. Bestem de ukendte sider og vinkler samt trekantens areal.

Bemærkning: Hvis sidelængderne i stedet er fx 50 cm og 60 cm behøver du ikke at skalere tallene for at få figuren til at være på skærmen: Du klikker bare på skalaenheden og retter fx denne til 10 cm.

$\overline{10 \text{ cm}}$

Opret et nyt Geometri-værksted. Først skal du konstruere $\angle A$. Hertil skal du bruge en vandret halvlinje.

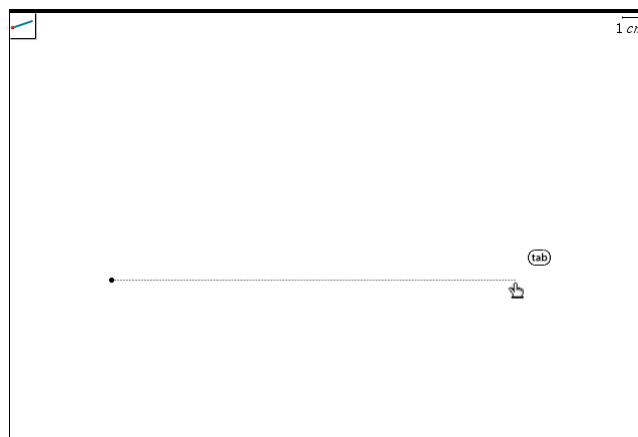
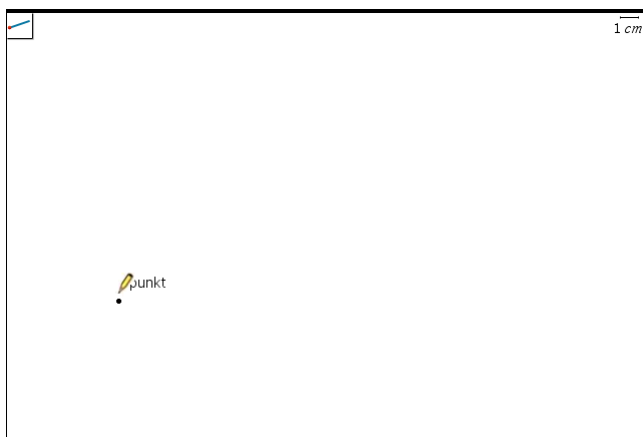
Tip

Det er nemmest at afsætte halvlinjen vandret, hvis du holder SHIFT nede imens.

Vælg

4:Linjer og punkter ▶ 6:Halvlinje

og afsæt to punkter. Så vil du få en halvlinje med start i det første punkt



Obs

Sørg om nødvendigt for, at vinkelmålet i Geometri er Indstillet til grader: Vælg menupunktet



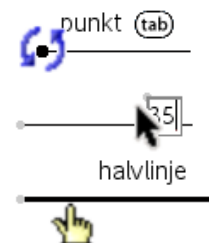
9:Indstillinger og indstil vinkelmålet i Geometri til grader.

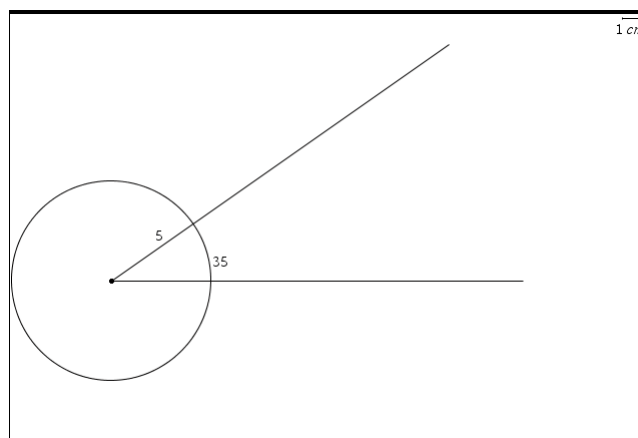
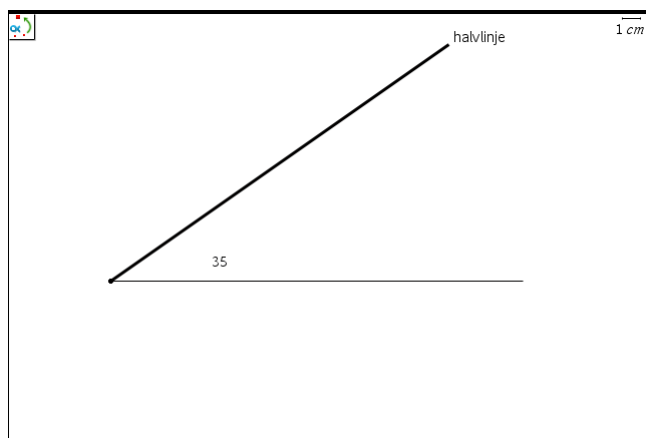
Denne halvlinje skal nu drejes 35° . Vælg hertil værktøjet

8:Transformation ▶ 4:Drejning.

Til en drejning skal du udpege tre ting:

1. *Drejningspunktet* — udpeg halvlinjens startpunkt
2. *Drejningsvinklen* — tast tallet 35
3. *Objektet, der skal drejes* — udpeg halvlinjen





På det højre skærbillede ser du en cirkel tegnet med centrum i halvlinjens startpunkt og radius 5. Denne laver du med værktøjet


 5:Figurer ▶ 1:Cirkel:

1. *Centrum* — som centrum udpeger du halvlinjens startpunkt 

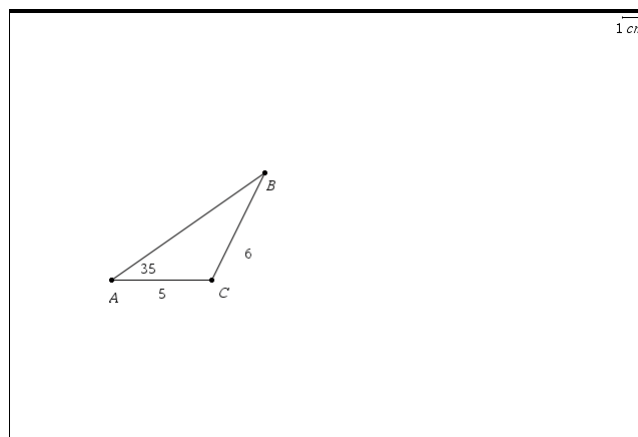
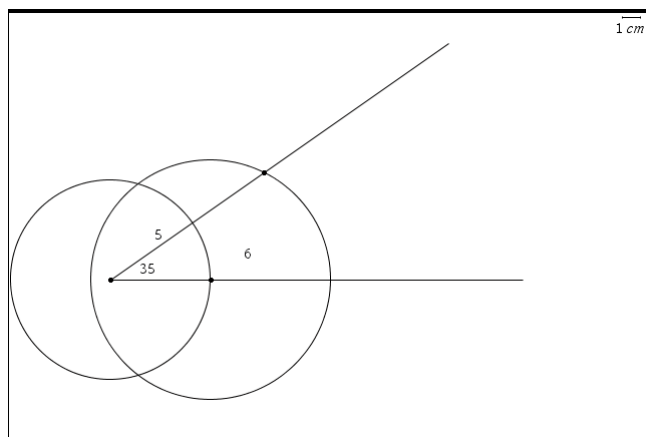
2. *Radius* — indtast tallet 5 

Husk

Du konstruerer skæringspunkter med værktøjet

 7: punkter og linjer ▶ Skæringspunkt(er).


Desuden skal du konstruere skæringspunktet C mellem cirklen og den vandrette halvlinje. Konstruer tilsvarende med cirkel-værktøjet en cirkel med centrum i C og radius 6. Konstruer også her skæringspunktet B med det venstre vinkelben:



På det højre skærbillede er der konstrueret en trekant ud fra de tre konstruerede punkter med værktøjet

Obs

Det er vigtigt, at du konstruerer en trekant, og ikke blot forbinder med linjestykker.

 5:Figurer ▶ 2:Trekant

Desuden er alle konstruktionslinjer skjult og vinkelspidserne er navngivet ved at højreklikke på vinkelspidsen og vælge **Navngiv** fra kontekstmenuen. Navneetiketterne kan flyttes efterfølgende, men trækkes de for langt væk fra det tilhørende punkt, følger de ikke længere med punktet, når dette flyttes.

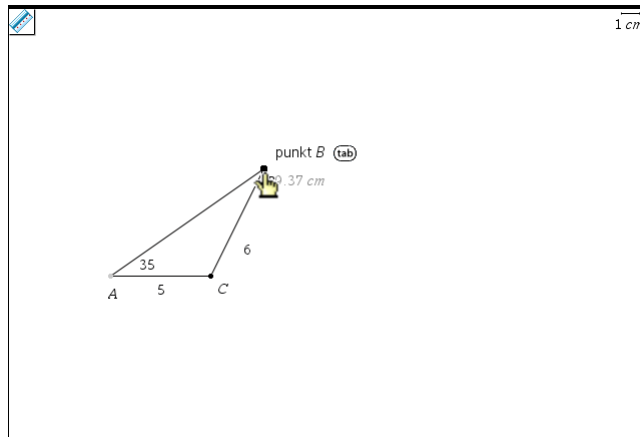
Nu er alt klar til at foretage målinger på modellen. Værktøjet, du skal bruge, finder du her:

Obs

Hvis du i stedet klikker på en af trekantens sider, så får du vist omkredsen af trekanten, og ikke sidelængden.

**6:Målinger ▶ 1:Længde:**

Klik først i punktet A , og dernæst i punktet B . Så vises længden af siden AB ganske svagt. Flyt markøren hen, hvor du ønsker, at længden skal stå. Klik for at placere:

**Obs**

Du måler vinkler med værktøjet




▶ Vinkel og arealer med værktøjet

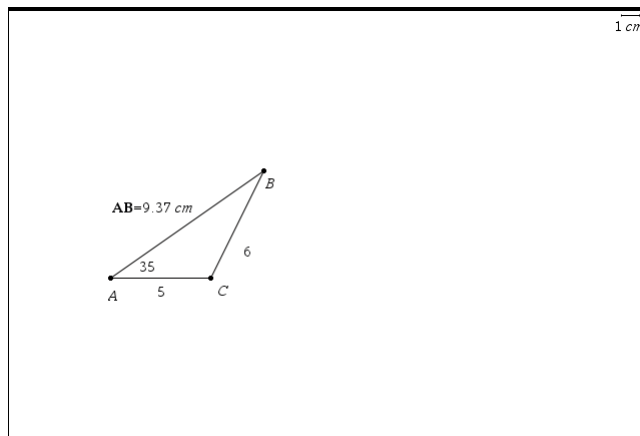


▶ Areal.

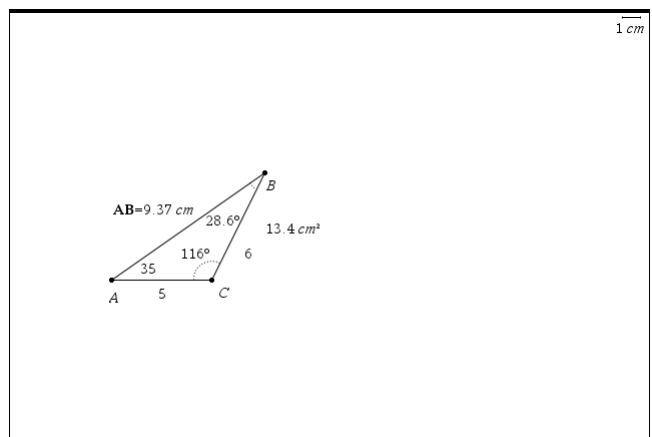
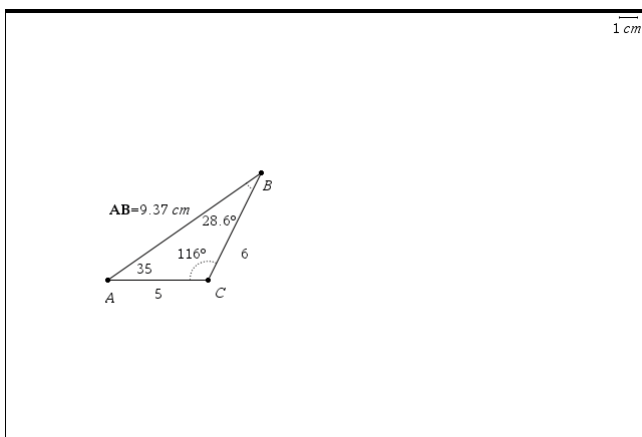
Med vinkelværktøjet måler du $\angle B$ og $\angle C$. Her skal du udpege vinklen ved at udpege tre punkter med den aktuelle vinkelspids som den midterste. Arealet bestemmes ved at udpege trekanten (ét klik):

Obs

Pas på, at du ikke kommer til at slette tekstfeltet med vinkelmålingen. Skulle det ske, så kan du redde det med fortryd  !

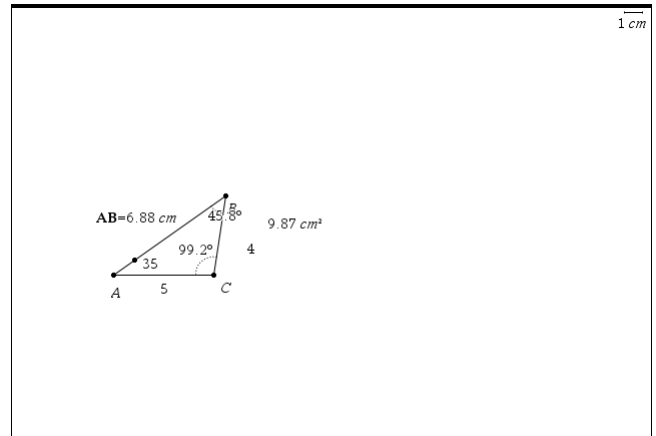
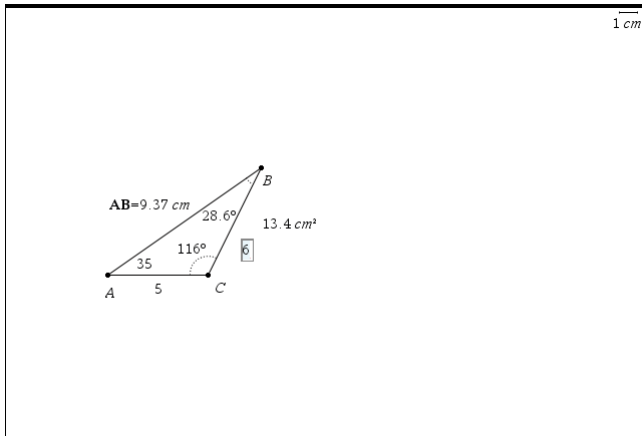
**Tip**

Hvis du synes, at tegningen er blevet for lille, kan du ændre skalaenheden til fx 0.5 cm.



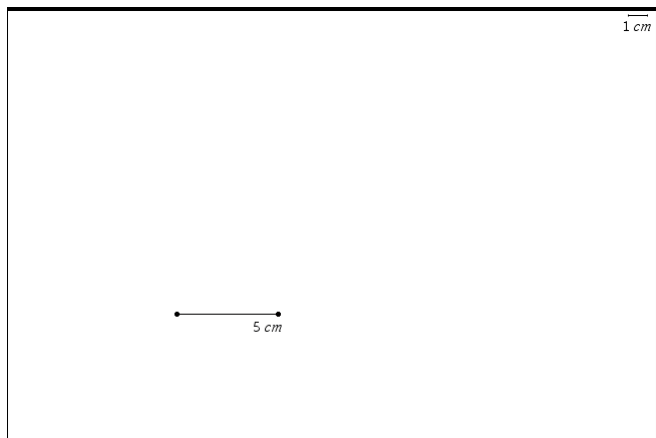
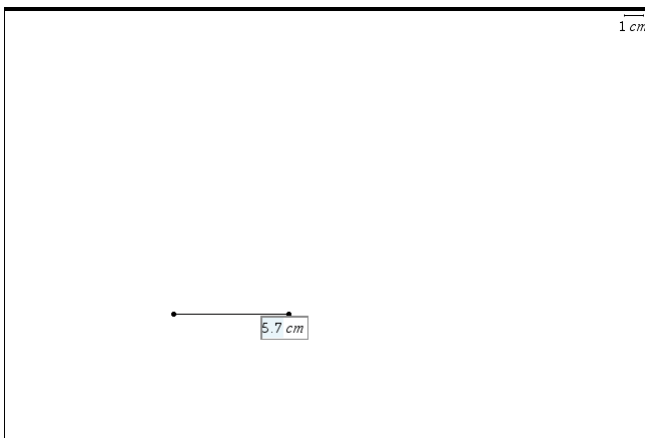
I denne model kan du ikke gribe fat i et hjørne og trække, men du kan ændre i tallene 35, 5 og 6, som konstruktionen er baseret på. Du klikker blot på at af tallene og indtaste en ny værdi. Herefter vil modellen omgående blive gengivet, og de nye værdier vil blive vist. Særlig interessant er det i ovenstående model at ændre a til fx 4. Dette er gjort på

skærbillederne nedenfor:

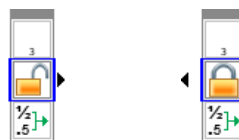


Læg mærke til, der dukkede et nyt punkt på siden AB . Her er der altså to mulige konstruktioner. For at forstå, hvad der sker, er det en god ide at vise konstruktionscirklen med centrum i C !

Bemærkning: Der findes en simpel konstruktion af *en grundlinje med en bestemt længde*: Man afsætter simpelthen et linjestykke med en vilkårlig længde og måler længden (fx ved at højreklikke på linjestykket). Efterfølgende retter man længdemålet til det ønskede:



Efterfølgende er det en god ide at låse målingen så man ikke ved en fejltagelse kommer til at rykke i endepunktet og derved ødelægge målet. Det gøres ved at højreklikke i målingen, vælge attributter og låse hængelåsen:



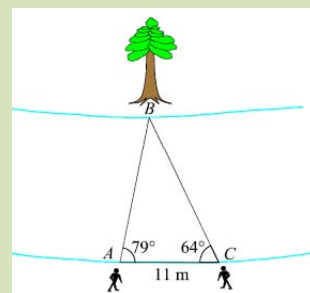
Desværre kan man ikke på samme måde rette vinkler til \odot . Så det er kun en nødtørftig start på en egentlig konstruktion.

En opgave løst i Geometri-værkstedet

Vi viser nu en typisk trigonometri-opgave løst rent geometrisk i Geometri-værkstedet. Senere hen vil den samme opgave blive løst i Note-værkstedet.

To personer bestemmer en flods bredde vha. et målebånd og en vinkelmåler. De to personer står med 11 meters afstand og måler sigtevinklerne A og C til et træ på den anden side af floden. Vinkel A måles til 79° og vinkel C til 64° (se figur)

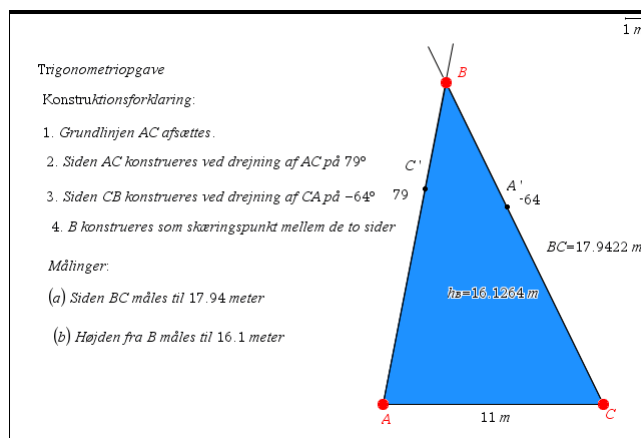
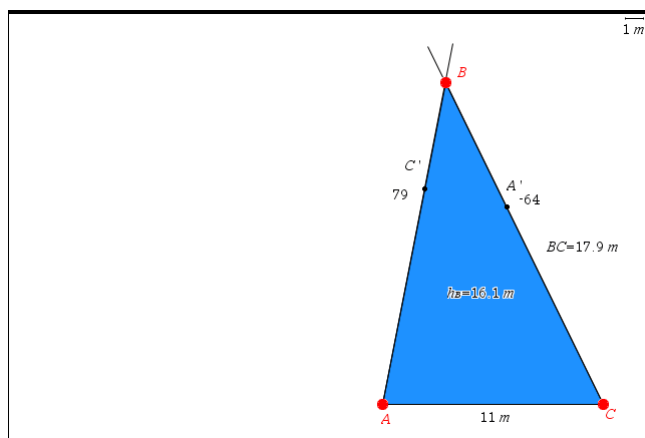
- Bestem $|BC|$
- Bestem flodens bredde, dvs. højden fra B i trekant ABC



Åbn et Geometri-værksted:

- Konstruer en grundlinje AC med længden 11 m (skift skalenhed til meter ☺).
- Drej punktet C omkring A med vinklen 79° . Drej tilsvarende punktet A omkring C med vinklen -64° , hvor du først taster 64 og derefter tilføjer minustegnet (idet drejningen denne gang foregår i negativ omløbsretning).
- Træk halvlinjer fra A gennem drejningspunktet C' og tilsvarende fra C gennem drejningspunktet A' .
- Konstruer skæringspunktet B og træk trekanten op.

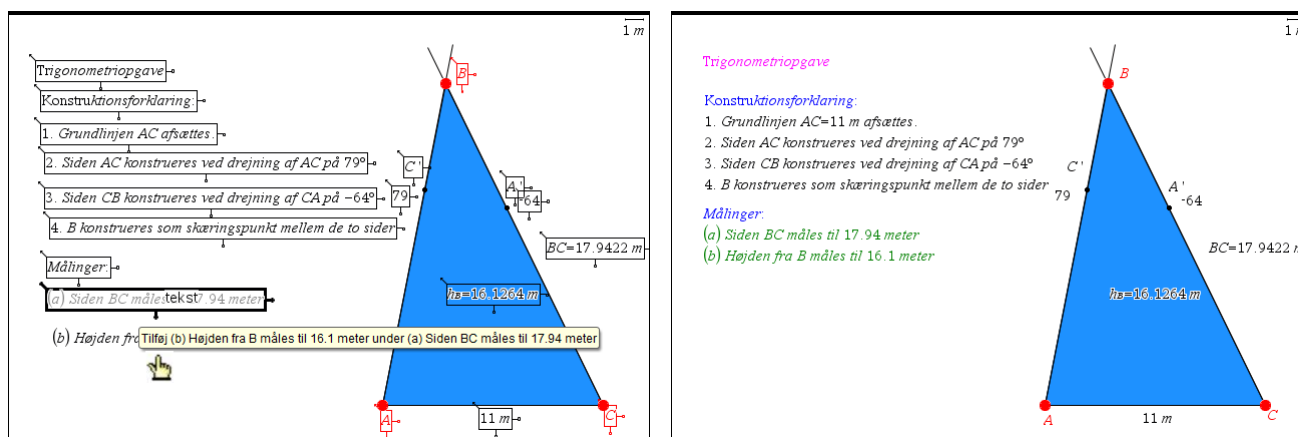
Nu da trekanten er konstrueret kan vi nemt måle de ønskede størrelser. Brug længdeværktøjet til at måle siden BC (klik i B og C) henholdsvis højden fra B (klik i B og siden AC). Sæt labels på målingerne ved at tilføje navne til målingerne.



Tilbage er der bare at tilføje en konstruktionsforklaring og de relevante målinger. De indsættes som tekstblokke en linje ad gangen. Vi har sat præcisionen af målingerne op ved hjælp af attributter for målingerne.

Man kan sætte teksten pænere op ved at farve overskrift og konklusioner (højreklik og sæt linjefarven med brug af **Betingelser**).

Endelig kan man sammenkæde den ved at højreklikke på en tekstbloks og hægte den på de øvrige tekstblokke. Det sker bagfra, dvs. fra neden: Højreklikkes på sidste tekstbloks kan den hægtes sammen med den foregående:



Derefter højreklikkes i den øverste af de to tekstblokke og de hægtes på den foregående (Målinger). Det samme gøres med Konstruktionsforklaringen.

Opgaven er nu løst og klar til at skrive ud ☺

4



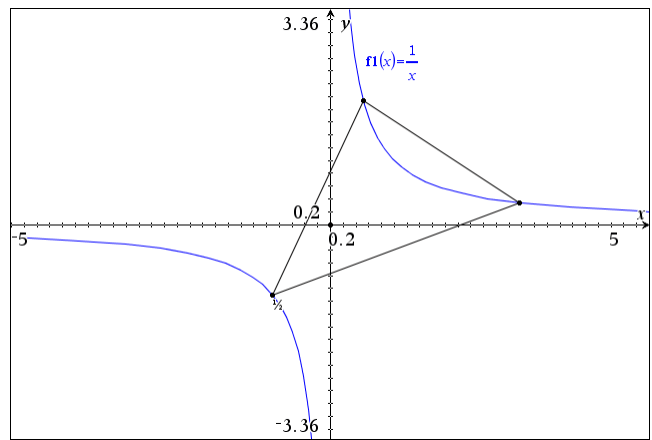
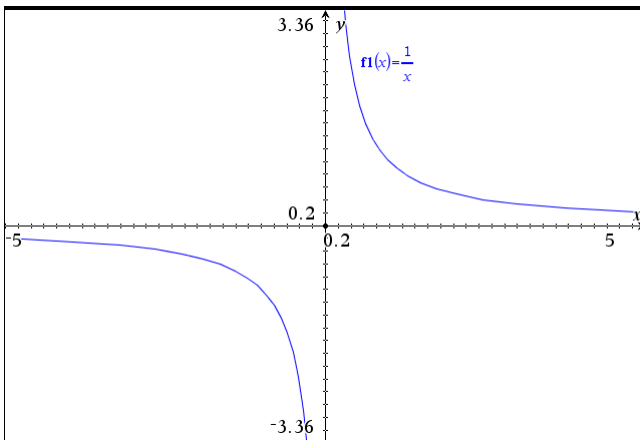
Geometri i Grafer

Geometri spiller også en stor rolle i Graf-værkstedet. Her er geometri-menuerne samlet for sig, men virker ligesom i et geometri-værksted. Man dog skal huske at figurerne kun vises korrekt, hvis koordinatsystemet er skalatro, dvs. benytter samme enhed på x -aksen og y -aksen (svarende til vinduesindstillingen Zoom-kvadrat). Tilsvarende er enheden nu ikke som standard cm, men i stedet koordinatenheden u (for unit)

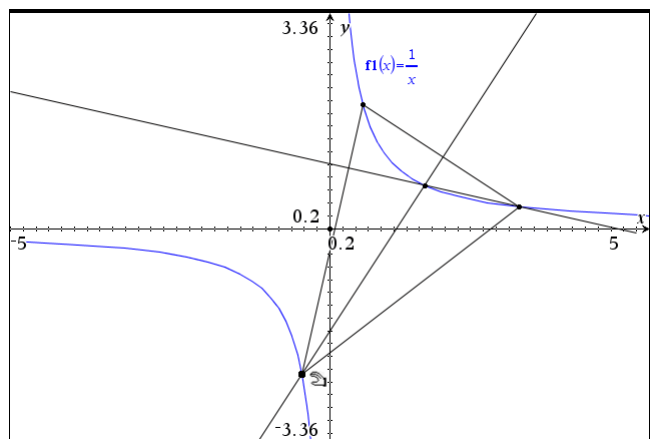
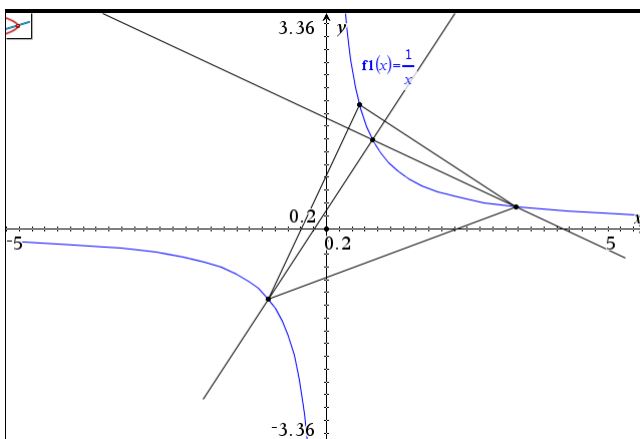
Geometri i Grafværkstedet

1. Tegn grafen for $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. Vælg 3 punkter på denne graf og konstruer en trekant ud fra disse.
3. Konstruer højdernes skæringspunkt i trekanten.
4. Fremsæt en påstand om højdernes skæringspunkt

Nedenfor ser du grafen for f tegnet i et Graf-værksted (der er zoomet ind en gang) og trekanten konstrueret, idet vi har benyttet Punkt På værktøjet til at konstruere de tre punkter på grafen og Trekant værktøjet til at konstruere trekanten. Til sidst har vi skjult koordinaterne:



Konstruer to højder med Vinkelret værktøjet, og konstruer de to højders skæringspunkt:

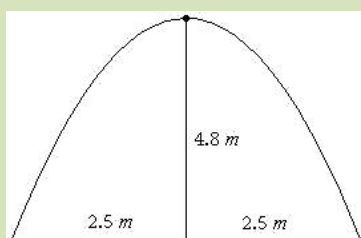


Træk nu i et punkt, og følg nøje med i, hvad der sker. Inden du fremsætter din påstand, skal du også undersøge, hvad der sker, hvis de 3 punkter ligger på samme gren af hyperblen.

Porten i parablen

Vi kombinerer nu de færdigheder vi har oparbejdet ved at løse den følgende opgave:

Figuren viser gavlen på en parabelformet hal



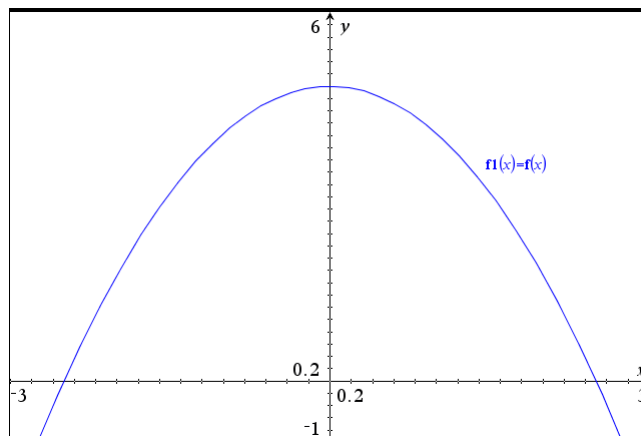
a. Indlæg et passende koordinatsystem, og angiv en forskrift for parablen

I gavlen skal indsættes en rektangulær port

b. Bestem den højest mulige port, der kan indsættes, når bredden af porten skal være 3 m, og bestem den port, der har det største mulige areal.

Indlæg koordinatsystemet, så parablen skærer akserne i $(-2.5, 0)$, $(2.5, 0)$ og $(0, 4.8)$. Forskriften beregnes i **Beregninger** og parablen tegnes i et **Graf-værksted**:

$f(x) := a \cdot (x+2.5) \cdot (x-2.5)$	Udført
$\text{solve}(f(0)=4.8, a)$	$a = -0.768$
$a := -0.768$	-0.768



Lav en port med bredden 3 m således: Vælg værktøjet

Tip

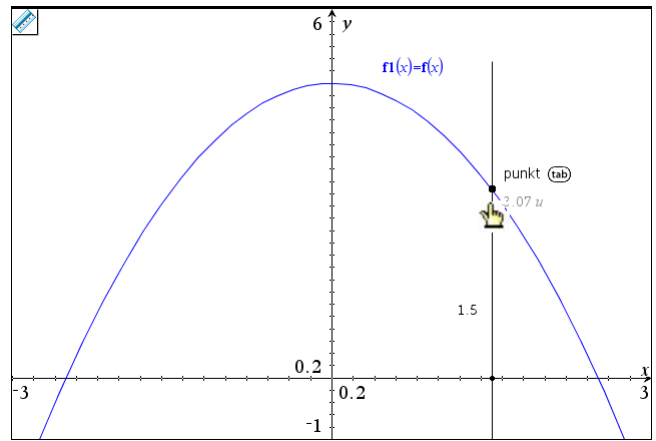
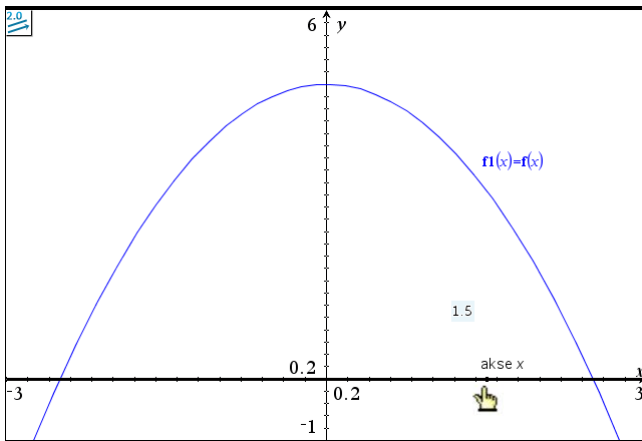
Hold markøren over ikonen i arbejdsområdet for at få en beskrivelse af, hvordan værktøjet virker.



8:Geometri ▶ 4:Konstruktion ▶ 8:Overfør måling.

Indtast tallet 1.5 og afslut med **Enter**. Udpeg dernæst x -aksen for at overføre målet hertil.

I det højre skærmbillede er der konstrueret en linje vinkelret på x -aksen i det nye punkt, og linjens skæringspunkt med parablen er konstrueret. Tilbage er der blot at måle afstanden mellem de to punkter. Hertil benytter du måleværktøjet, og udpeger de to punkter.



Til den anden del af opgaven skal du konstruere en port på *et frit punkt* på x -aksen. Ovenstående konstruktion kan ikke umiddelbart genbruges, da punktet på x -aksen er låst, men med værktøjet

1: Handlinger ▶ A: Omdefinier,

kan du frigøre punktet:

1. Udpeg det punkt, du vil omdefinere:

Når du klikker, ændres markøren til en pil

2. Flyt markøren en anelse. Markøren ændres da til

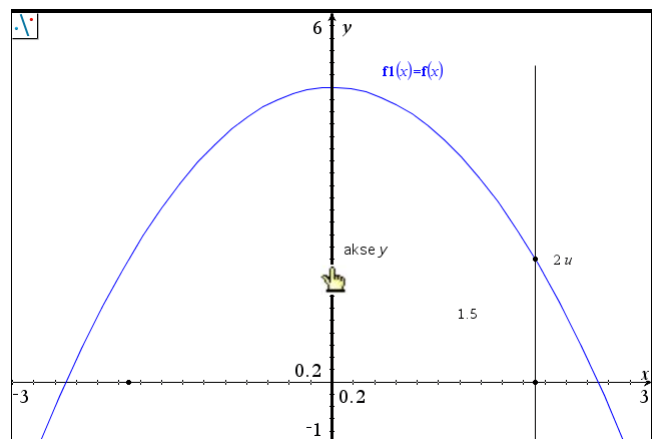
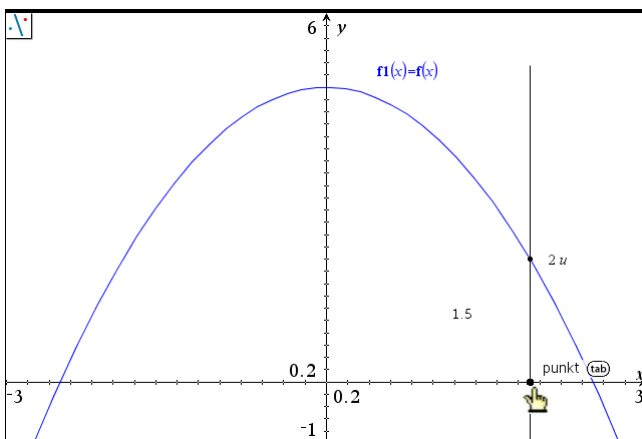
Afslut med at klikke (men ikke i et gitterpunkt på aksen!) og forlad værktøjet med ESC.

Kontroller, at du kan gribe punktet

Så skal konstruktionspunkterne spejles i y -aksen. Benyt værktøjet

8: Geometri ▶ 5: Transformation ▶ 2: Spejling i linje.

Udpeg først det punkt, du vil spejle, dernæst spejlingsaksen (her y -aksen):

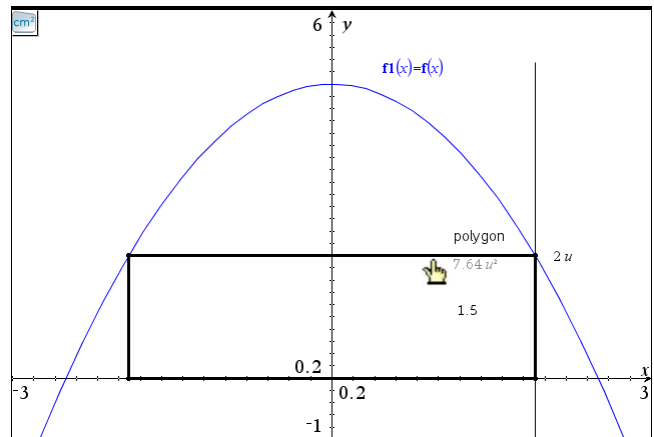
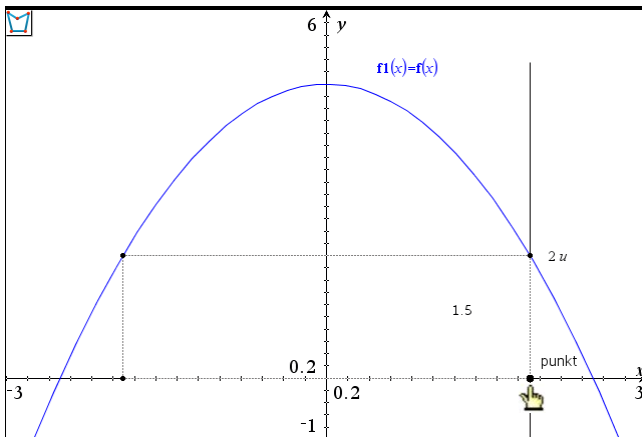


Benyt værktøjet

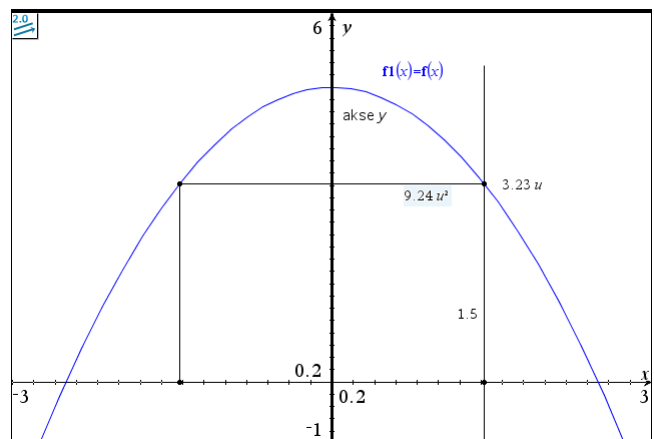
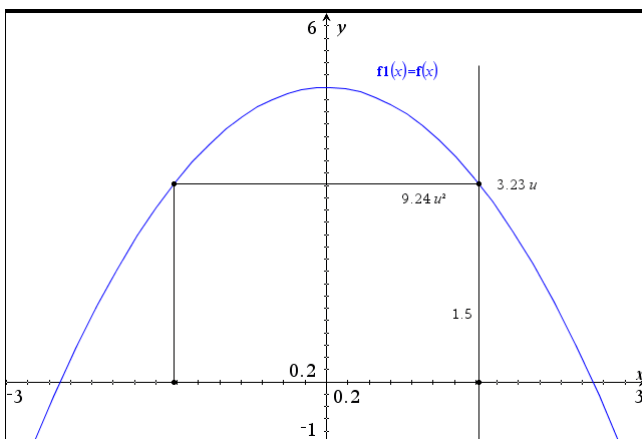


8:Geometri ▶ 2:Figurer ▶ 4:Polygon

til at konstruere porten. Du udpeger de 4 punkter ét efter ét, og taster Enter (eller dobbeltklikker) i det sidste punkt for at afslutte. Mål arealet:



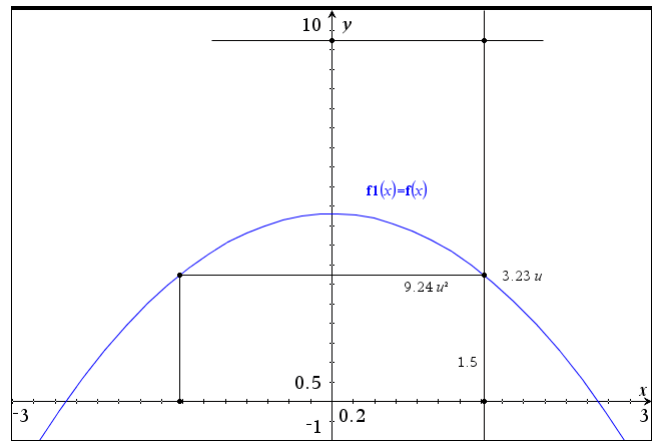
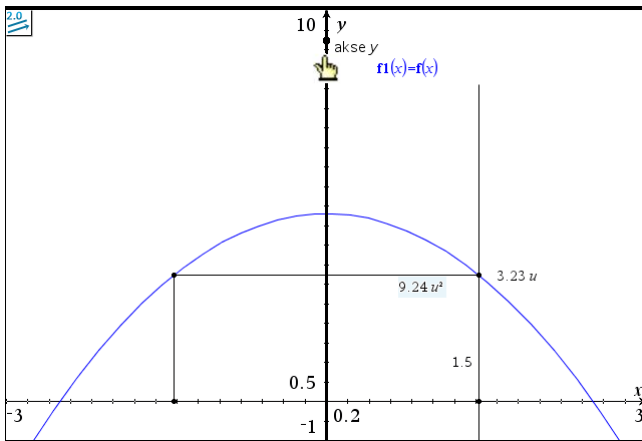
Skjul konstruktionslinjen. Grib derefter det frie punkt på x-aksen, og flyt lidt frem og tilbage indtil du finder det største areal.



En elegant metode til at finde det maksimale areal er at lave et såkaldt geometrisk sted.

Hertil skal du først konstruere et punkt (x,y) , hvor y er arealet svarende til (den halve) portbredde x :

1. Overfør areal-tallet til y-aksen (venstre skærbillede nedenfor). Du skal måske regulere din y-akse først, så du kan se punktet — YMaks skal mindst være 10.
2. Konstruer dernæst en linje vinkelret på y-aksen gennem det konstruerede punkt (linjen vinkelret på x-aksen er der allerede!).
3. Konstruer skæringspunktet for de to linjer vinkelret på x-aksen og vinkelret på y-aksen..



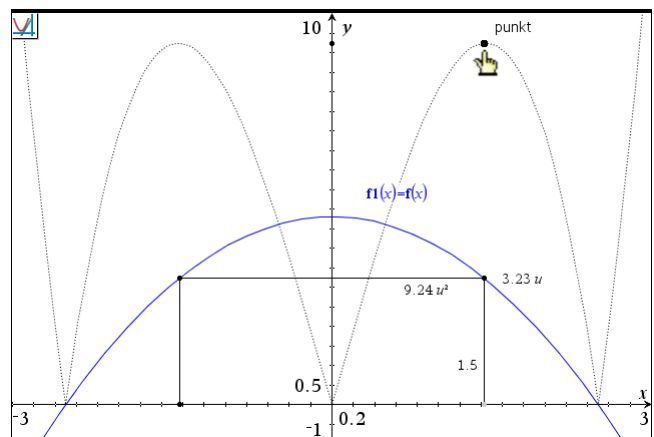
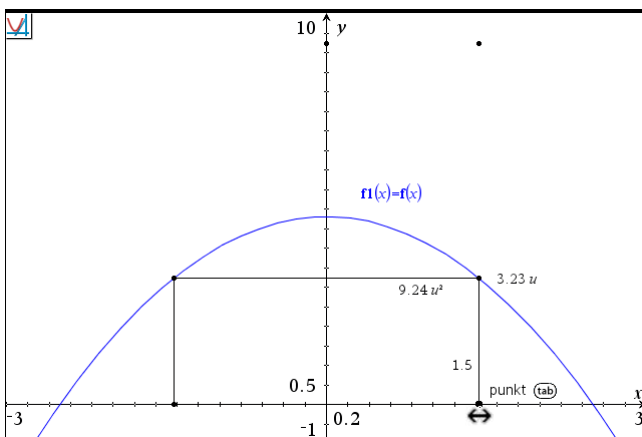
4. Skjul de to konstruktionslinjer, og vælg værktøjet



8:Geometri ▶ 4:Konstruktion ▶ 6:Geometrisk sted.

Udpeg det frie punkt på x -aksen. Se det venstre skærbillede nedenfor. Pilen viser, at punktet er det uafhængige punkt, som kan bevæges frem og tilbage. Udpeg herefter det konstruerede afhængige punkt — og straks ser du det geometriske sted i stiplede form. Når du klikker, får du et fuldt optegnet spor.

Træk i det frie punkt igen, og følg med i, hvad der sker. Træk også punktet uden for intervallet $[0, 0.25]$, så får du en forklaring på, hvorfor kurven ser ud, som den gør.



Du skal være opmærksom på, at det er et tilnærmet resultat, du har fundet her. Arealet af porten kan udtrykkes ved funktionen $g(x) = 2 \cdot x \cdot f(x)$, $0 \leq x \leq 2.5$. Maksimum for denne funktion er 9.2376, hvilket du nemt kan bestemme i et Beregnings-værksted.

Analytisk geometri

I den analytiske geometri har du de geometriske objekter beskrevet ved hjælp af punkter. Fx er en linje beskrevet fuldstændig ved to punkter på linjen.

Find ligningen for linjen gennem punkterne $(-6, 4)$, og $(5, -4.5)$.

Åbn et nyt Graf-værksted, og indsæt et gitter med

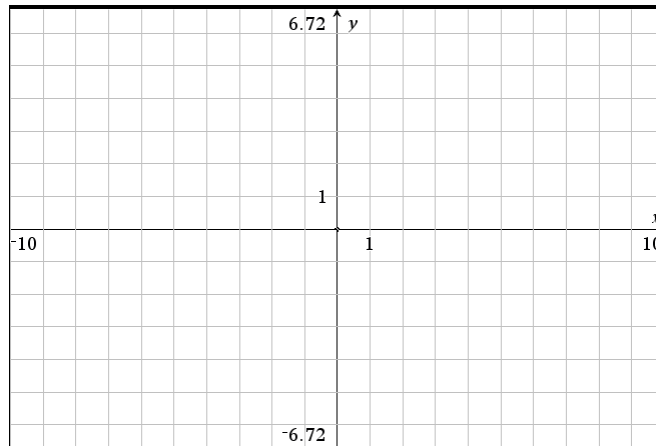
 2:Vis ▶ 6:Gitter ▶ 3:Linjegitter

Obs


Du kan ændre skalaen for gitteret (her 1, så gitteret svarer til heltallige koordinater) ved at klikke på skalamærkerne og ændre værdien.

Obs

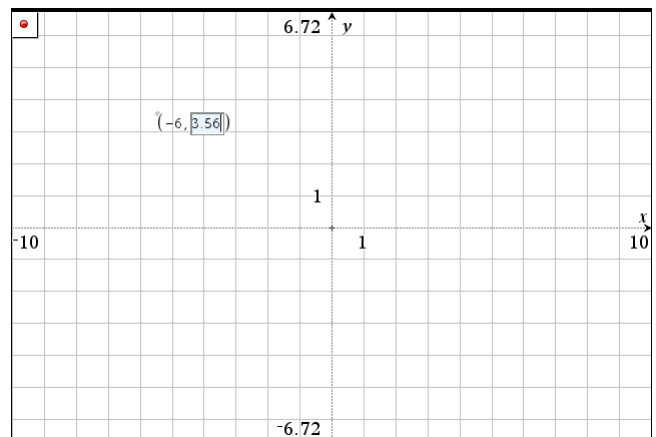
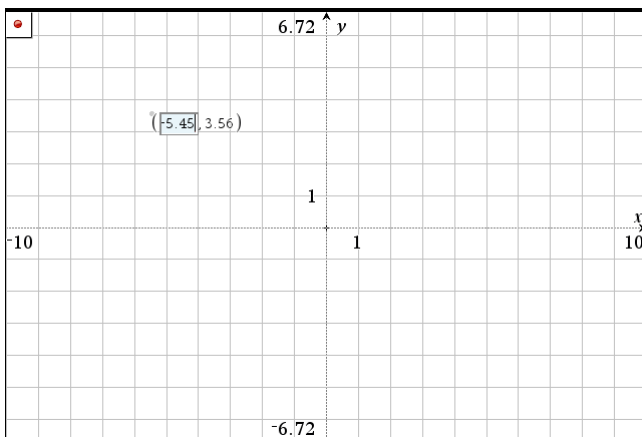
Når du indtaster koordinaterne må du endelig ikke bruge TAB-tasten! Så åbner du nemlig i stedet for indtastningslinjen til forskrifter for funktioner.



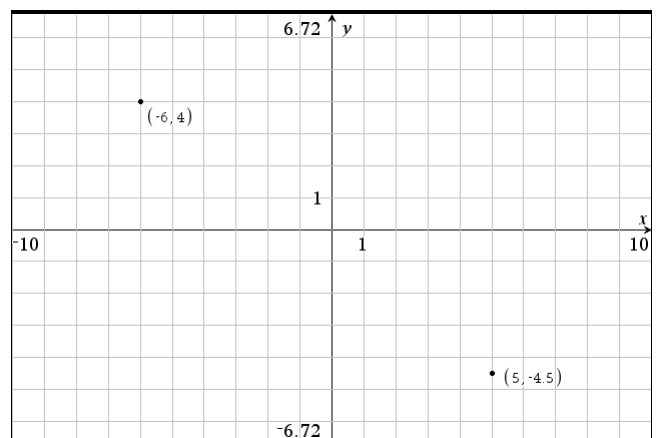
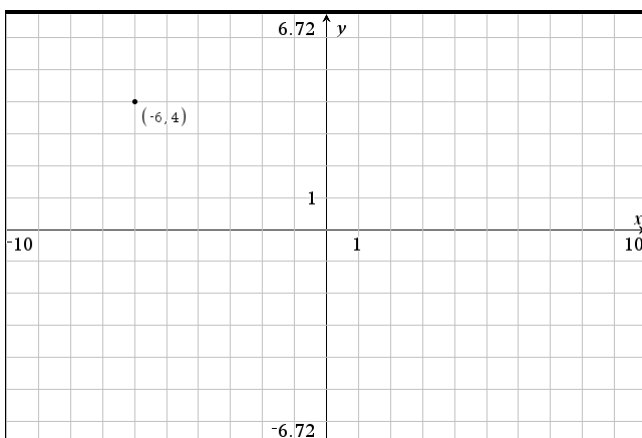
Du afsætter punkter i koordinatsystemet ved at vælge

 8:Geometri ▶ 1: Punkter og linjer ▶ 1:Punkt,

og blyant-ikonet kommer til syne. Tast nu en venstreparentes, og blyantens koordinater vises. Du vil sikkert se andre koordinater end dem du ser på det venstre skærmbillede nedenfor, men det betyder ikke noget. Indtast nu -6 efterfulgt af Enter, og y-koordinaten markeres:



Indtast 4 og afslut med Enter.



Punktet (5,-4.5) afsættes helt tilsvarende.

Obs

Punkter afsat med koordinater er *frie* punkter, dvs. du kan trække i dem! For at låse dem skal du højreklikke på punktet og vælge **Fastgør**.

Du kan fx få vist punktets koordinater med værktøjet (du kan også højreklikke på punktet)

 1:Handlinger ▶ 7:Koordinater og ligninger.

Flyt markøren hen til punktet. Når finger-ikonet vises, vises samtidig koordinaterne nedtonet. Klik for at vælge punktet, og klik der, hvor du vil have koordinaterne (-6,4) placeret.

Obs

Du ændrer et koordinatsæt ved at flytte markøren til koordinatsættet, og dobbeltklikke på koordinaterne.

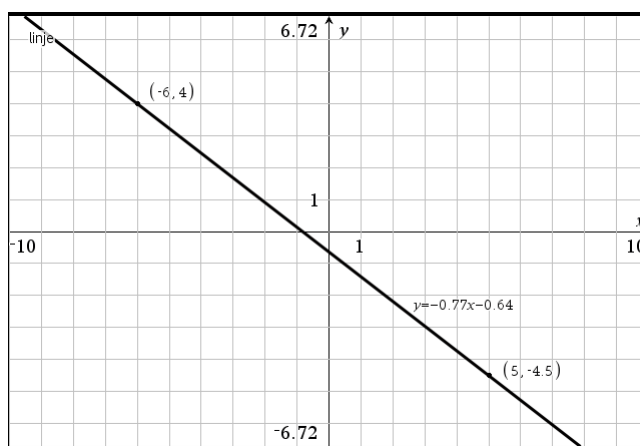
Tegn en linje gennem punkterne, (-6,4) og (5,-4.5) med linjeværktøjet

 8:Geometri ▶ 1: Punkter og linjer ▶ 4:Linje.

Du kan ligesom før få vist linjens ligning med

 1:Handlinger ▶ 7:Koordinater og ligninger

(eller du kan højreklikke på linjen).

**Tip**

Skulle du have glemt, hvordan du afsætter punkter, flyt da blyanten op på værktødsikonet, og en vejledning vil komme frem.

Bemærkning: Du kan faktisk afsætte punkter i gitteret uden at skulle indtaste koordinater — du skal blot flytte blyant-ikonet til det ønskede gitterpunkt, og når meddelelsen ‘punkt på’ vises, da klikker du.

Du kan naturligvis også arbejde helt uden gitteret ☺.

Skyderobjekter

En cirkel har centrum i (-2,3) og radius $r = 5$. Find ligningen for de to tangenter, der er parallelle med linjen med ligningen $y = \frac{3}{4}x$.

Åbn et nyt Graf-værksted, og indsæt et gitter med

 2:Vis ▶ 6:Gitter ▶ 2: Punktgitter

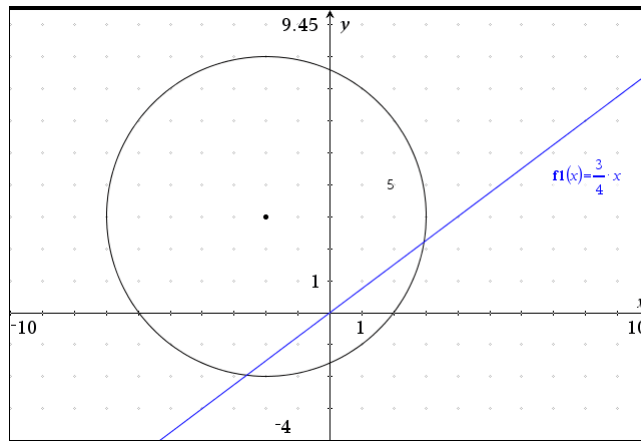
Afsæt punktet (-2,3) i gitteret, og indtast tallet 5 som tekst. Benyt cirkel-værktøjet til at tegne cirklen ved at udpege centrum og radius. Tegn linjen som funktionen $f(x) = \frac{3}{4}x$.

Indstil vinduet passende:

Obs

Du kan i stedet åbne et nyt Geometri-værksted og vælge

 2:Vis ▶
1:Graftegning

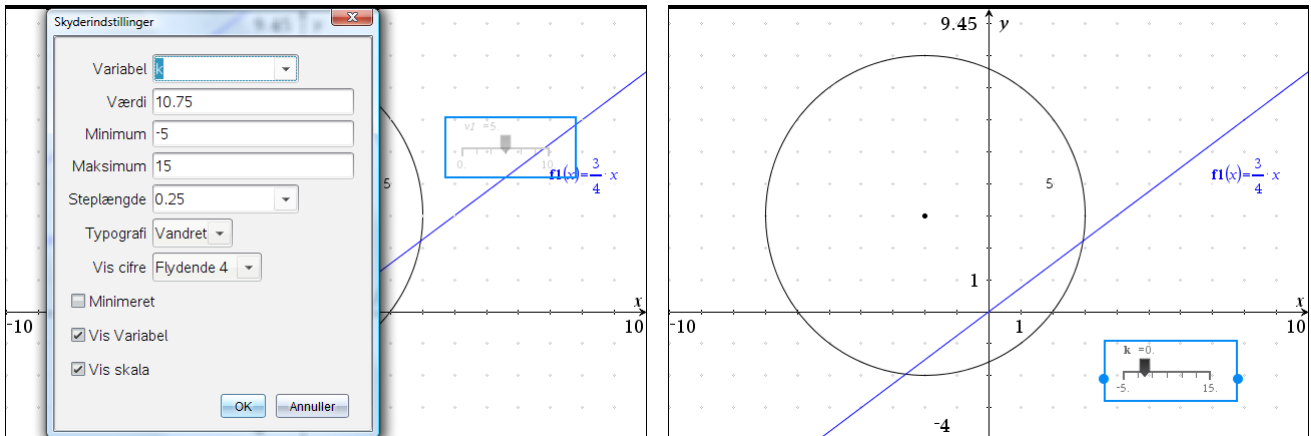
**Tip**

I kontekstmenuen får du også mulighed for animation. Prøv dette!

Vælg nu

1:Handlinger ▶ B:Opret skyder.

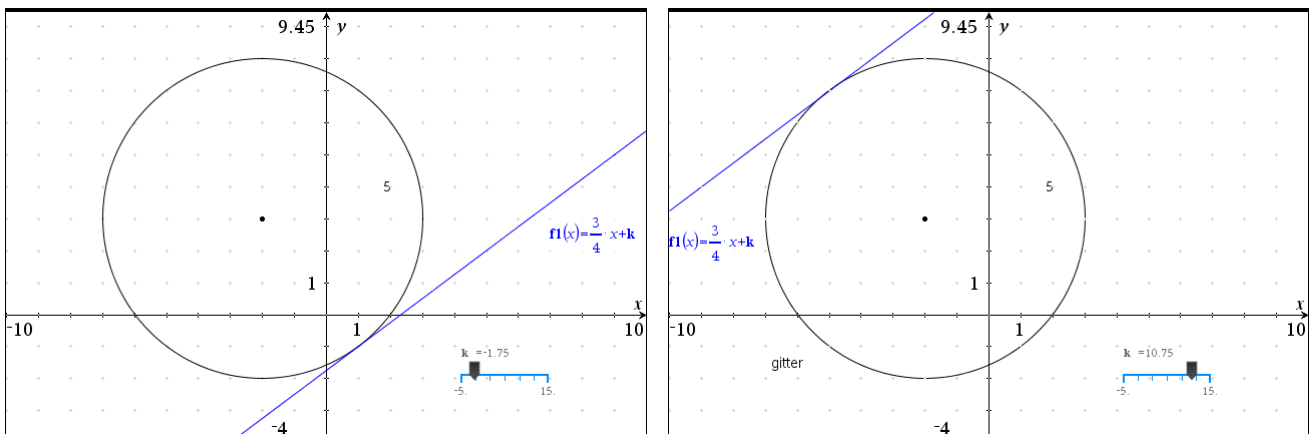
Et skyderobjekt kommer da til syne på skærmen sammen med dialogboksen for skyderen. Ret variabelnavnet til **k** og indstil som vist:

**Tip**

Du kan ændre skyderens start- og slutværdi direkte, ligesom du kan med en koordinatakse.

Efterfølgende kan du flytte rundt på skyderen ligesom du kan udvide den eller trække den sammen ved at hive i ankrene på siden af skyderen.

Knyt skydervariablen **k** til funktionen ved at ændre forskriften til $f1(x) = \frac{3}{4} \cdot x + k$. Grib skyderen, og træk i begge retninger, indtil linjen tangenter cirklen:



Du kan også gå helt anderledes til værks uden brug af skyder, så fjern leddet $+k$ i forskriften for $f_1(x)$:

Obs

En linje defineret som en funktion kan ikke indgå i en Vinkelret konstruktion. Først må du konstruere en geometrisk ret linje oven på den retlinde graf.

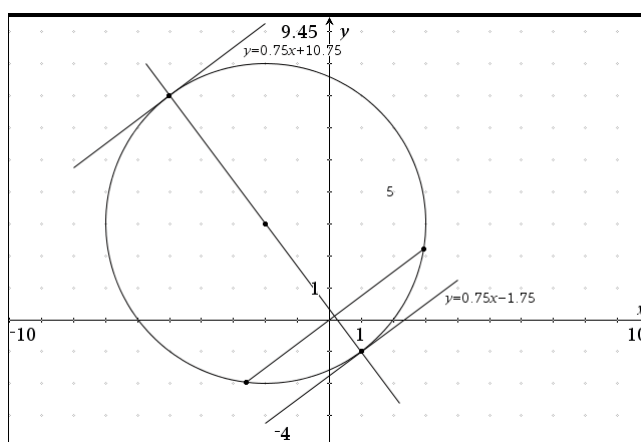
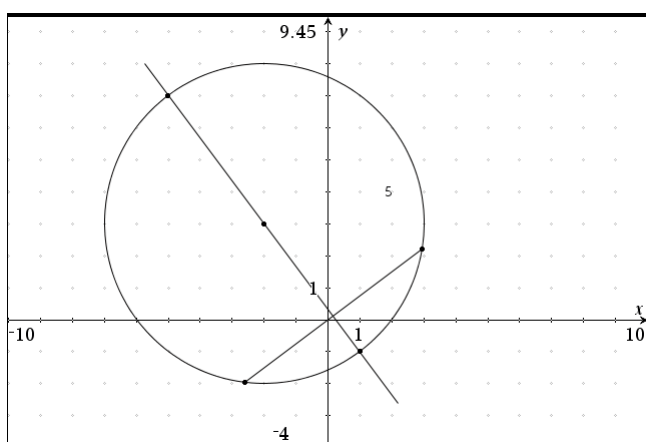
Konstruer først skæringspunkterne mellem linjen og cirklen, og forbind de to punkter med et linjestykke. Skjul linjen. Konstruer en linje gennem centrum, og vinkelret på linjestykket. Konstruer skæringspunkterne mellem denne linje og cirklen:

Tilbage er blot at konstruere linjer i de to skæringspunkter parallelle med linjestykket. Hertil benytter du

 8:Geometri ▶ 4:Konstruktion ▶ 2:Parallel,

og får vist ligningerne med

 1:Handlinger ▶ 7:Koordinater og ligninger.



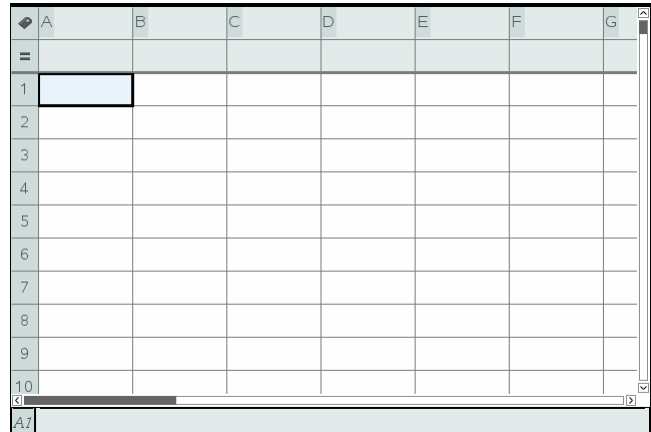
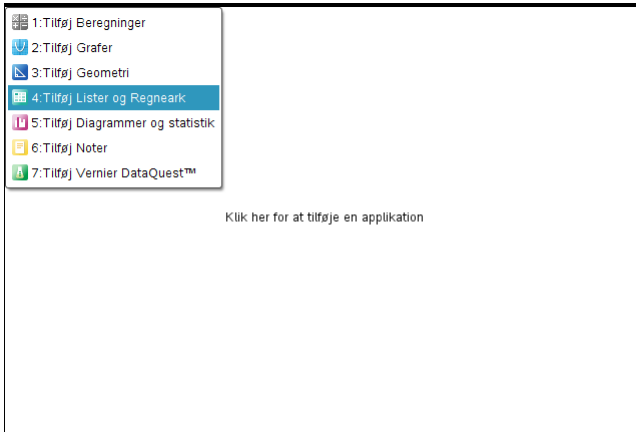
5



Lister og regneark

Som navnet antyder bruges lister og regneark både til at håndtere lister i tabeller og celler i regneark. Ydermere er det et symbolsk regneark. Der er altså tale om en udvidelse af de sædvanlige regneark ☺

Opret et nyt dokument, og indsæt et Lister og Regneark værktød



Regnearket

Obs

Du kan følge din indtastning i nederste linje på skærmen, hvor indholdet af den aktuelle celle vises i Pretty Print.

Tip:

Du navigerer i regnearket med piletasterne. En indtastning afsluttes med Enter eller PiNed.

På det højre skærmbillede ovenfor ser du regnearket. Den øverste række viser søjlenavnene (A, B, C, ...). Til højre for søjlenavnet er et tomt felt, *navnefeltet*, hvor du kan tildele søjlen et navn. Rækken umiddelbart under er formellinjen, hvor du kan fastlægge en hel søjle/liste ad gangen. Først i 3 række begynder selve regnearket, hvor du kan fastlægge en enkelt celle. Så længe man befinder sig under skillelinjen virker regnearket som et traditionelt *celleark* (ala Excel), men inddrager du navnelinjen eller formellinjen arbejder du med hele søjler/lister ad gangen, og regnearket virker da som et *listeark*.

Regnearket indeholder kun 26 søjler (A-Z), men 2500 rækker.

Tast tal ind i søjle A, som vist nedenfor, og placer markøren i formelfeltet under B, hvor du skriver søjleformlen $2a + 1$ (lighedstegnet skriver programmet selv, når du dobbeltklikker i formelcellen):

A	B	C	D	E	F	G
=	=					
1	1					
2	2					
3	5					
4	7					
5						
6						
7						
8						
9						
10						

A	B	C	D	E	F	G
=	=2a+1					
1	1					
2	2					
3	5					
4	7					
5						
6						
7						
8						
9						
10						

Tast **Enter**, og de beregnede værdier fyldes i søjle B (venstre skærbillede nedenfor):

A	B	C	D	E	F	G
=	=2*a[]+1					
1	1	3				
2	2	5				
3	5	11				
4	7	15				
5						
6						
7						
8						
9						
10						

A	B	C	D	E	F	G
=	=2*a[]+1					
1	1	3				
2	2	5				
3	5	11				
4	7	15				
5	9	19				
6						
7						
8						
9						
10						

Obs

For at undgå navnekonflikt sættes automatisk [] efter a i formlen for søjle B.

Naviger til celle A5, og indtast her fx 9 efterfulgt af **Enter** (højre skærbillede ovenfor). Læg mærke til hvordan søjle A udgør en *uafhængig* liste, hvor du helt frit kan indtaste celleværdier, mens søjle B udgør en *afhængig* liste, der opdateres løbende i takt med ændringerne i søjle A.

Navngivning af søjler**Obs**

xk og **yk** er såkaldte listevariable, dvs. listerne har nu fået tildelt et navn og dermed registreret som variable.

Pil op til navnefeltet til højre for søjlenavnet A, og skriv her **xk**. Tilsvarende skriver du **yk** i feltet til højre for B (venstre skærbillede nedenfor)

Variabelnavnene **xk** og **yk** er nu tilgængelige i andre værksteder. For at undersøge dette nærmere, kan du fx indsætte **Beregninger**, og beregne værdien af variableerne **xk** og **yk** (læg mærke til at under indtastningen skrives de med fed, for at markere at der er tale om variable, som er genkendt af systemet). Læg også mærke til at lister skrives vandret i **Beregninger**, men lodret i **Lister og regneark**.

A xk	B yk	C
=	=2*a[]+1	
1	1	3
2	2	5
3	5	11
4	7	15
5	9	19
6		
7		
8		
9		
10		

xk	{1,2,5,7,9}
yk	{3,5,11,15,19}
xk[3]	5
yk[5]	19

Du kan også som vist referere til de enkelte celler ved hjælp af kantede parenteser.

Cellereferencer og celleformler

Et beløb på 1000 kr. blev ved starten af 2004 indsat på en konto. Rentesatserne i perioden 2004 - 2008 var som vist i tabellen

År	2004	2005	2006	2007	2008
Rentefod i %	4,8	3,5	3,7	2,9	3,1

Lav et regneark, der viser, hvordan saldoen på kontoen har udviklet sig år for år.

Obs

Anførelstegn kommer i par (ligesom parenteser).

Opret et nyt Lister og Regneark værksted, og indtast tabellens oplysninger vist nedenfor. Læg mærke til, at når du indtaster *tekst* i en celle, *skal* teksten omsluttes af anførelstegn (gåseøjne) — ellers opfattes teksten som et variabelnavn.

År	Rentefod	Gl. saldo	Rente	Ny saldo...
2004	4.8	1000		
2005	3.5			
2006	3.7			
2007	2.9			
2008	3.1			

År	Rentefod	Gl. saldo	Rente	Ny saldo...
2004	4.8	1000	48.	
2005	3.5			
2006	3.7			
2007	2.9			
2008	3.1			

D2 = $\frac{c2 \cdot b2}{100}$

Obs

TI-Nspire CAS skelner – med undtagelse af tekststrengene – ikke mellem store og små bogstaver, så det er ligegyldigt om du skriver *c2* eller *C2*.

Du kan udvide en søjle ved at trække i kanten helt oppe foroven!

I celle D2 skal det første års rente beregnes. Dette sker ved at indtaste formlen $=C2*B2/100$ i celle D2 (højre skærmbillede ovenfor, hvor det denne gang er *dig*, der sætter lighedstegnet!).

Tip

I stedet for at skrive *c2* i formlen kan du blot klikke på cellen C2 efterfulgt af **Enter**, og *c2* vil blive indsat i formlen.

I celle E2 skal saldoen efter første år beregnes, dvs., indholdet i celle C2 og celle D2 skal lægges sammen. Dette sker med formlen $=C2+D2$ i celle E2.

Saldoen, der er beregnet i celle E2, er det beløb, der skal forrentes i det efterfølgende år. Indholdet af celle C3 skal derfor være det samme som indholdet af celle E2. Dette klarer du let ved at indtaste formlen $=E2$ i celle C3.

År	Rentefod	Gl. saldo	Rente	Ny saldo...
2004	4.8	1000	48.	1048.
2005	3.5	1048.		
2006	3.7			
2007	2.9			
2008	3.1			

C3 = e2

År	Rentefod	Gl. saldo	Rente	Ny saldo...
2004	4.8	1000	48.	1048.
2005	3.5	1048.		
2006	3.7			
2007	2.9			
2008	3.1			

D2:E2 = $\frac{c2 \cdot b2}{100}$

Udfyldningen af resten af regnearket vil ske ved kopiering:

Formlerne, der skal stå i celle D3 og E3, er helt analoge til formlerne i celle D2 og E2 — blot skal cellereferencerne ændres, så de refererer til celler med samme relative/indbyrdes placering. Dette sker helt automatisk således:

Marker cellerne D2 og E2, og flyt markøren til feltets nederste højre hjørne (figuren til højre ovenfor). Markøren ændres til et \oplus . Træk med musen en celle ned (venstre skærbillede), og slip:

1	År	Rentefod	Gl. saldo	Rente	Ny saldo...
2	2004	4.8	1000	48.	1048.
3	2005	3.5	1048.		
4	2006	3.7			
5	2007	2.9			
6	2008	3.1			

1	År	Rentefod	Gl. saldo	Rente	Ny saldo...
2	2004	4.8	1000	48.	1048.
3	2005	3.5	1048.	36.68	1084.68
4	2006	3.7			
5	2007	2.9			
6	2008	3.1			

Klik på cellerne D3 og E3 for at tjekke, om formlerne ser ud som forventet.

Obs

Et firkantet *celleområde* specificeres ved at angive øverste venstre celle og nederste højre celle. Mellem de to celler sættes et kolon (:).

Cellerne C3, D3 og E3 indeholder nu formler, der kan kopieres til de tre resterende rækker. Så marker celleområdet C3:E3, og træk 3 rækker ned for at udvide den stiplede boks.

Hvis du ønsker, at beløbene skal vises med 2 decimaler, skal du vælge indstillingen Fast2 i dokument-indstillinger (på statusbjælken forned).

1	År	Rentefod	Gl. saldo	Rente	Ny saldo...
2	2004	4.8	1000	48.	1048.
3	2005	3.5	1048.	36.68	1084.68
4	2006	3.7			
5	2007	2.9			
6	2008	3.1			

1	År	Rentefod	Gl. saldo	Rente	Ny saldo...
2	2004	4.8	1000	48.	1048.
3	2005	3.5	1048.	36.68	1084.68
4	2006	3.7	1084.68	40.1332	1124.81
5	2007	2.9	1124.81	32.6196	1157.43
6	2008	3.1	1157.43	35.8804	1193.31

Absolutte cellereferencer

Hvis du vil lave en plan for afviklingen af et lån kan du stort set gå frem som i eksemplet ovenfor. Opret en ny side med et Lister og regneark værktød (der kan sagtens være flere indenfor den samme opgave).

5: Lister og Regneark

	A	B	C	D	E	F
1	Lån	10000				
2	Ydelse	300				
3	Rente	1.2				
4	Termin	Gl. Saldo	Rente	Afdrag	Ny restgæld	
5	1	10000	120.	180.	9820.	
6	2	9820.				
7	3					
8	4					
9	5					
10	6					

	A	B	C	D	E	F
1	Lån	10000				
2	Ydelse	300				
3	Rente	1.2				
4	Termin	Gl. Saldo	Rente	Afdrag	Ny restgæld	
5	1	10000	120.	180.	9820.	
6	2	9820.	117.84	182.16	9637.84	
7	3	9637.84	115.654	184.346	9453.49	
8	4	9453.49	113.442	186.558	9266.94	
9	5	9266.94	111.203	188.797	9078.14	
10	6	9078.14	108.938	191.062	8887.08	

Begynd som vist på det første skærmbillede. Dog skal du her sikre, at referencerne til B2 (ydelsen) og B3 (renten) i dine formler forbliver uændrede under en kopiering. Dette klarer du ved at *låse* cellereferencen ved at indsætte \$-tegn foran såvel søjlebetegnelsen (så du låser søjlen, hvorefter man kun kan rykke op og ned ved en kopiering) som rækkebetegnelsen (så du også låser rækken, hvorefter cellen ligger helt fast).

Indtast derfor formlerne:

- i celle B5 =b1
- i celle C5 =b5*\$b\$3/100
- i celle D5 =\$b\$2-c5
- i celle E5 =b5-d5
- i celle B6: =e5

og kopier (som ovenfor) i to omgange!

Ved at scrolle nedad kan du se at lånet er betalt tilbage efter 43 terminer:

	A	B	C	D	E	F
39	35	2497.61	29.9713	270.029	2227.58	
40	36	2227.58	26.731	273.269	1954.31	
41	37	1954.31	23.4517	276.548	1677.76	
42	38	1677.76	20.1331	279.867	1397.9	
43	39	1397.9	16.7747	283.225	1114.67	
44	40	1114.67	13.376	286.624	828.046	
45	41	828.046	9.93655	290.063	537.983	
46	42	537.983	6.45579	293.544	244.438	
47	43	244.438	2.93326	297.067	-52.6284	
48						

6



Diagrammer og statistik

I Diagrammer og Statistik værktødet kan du visualisere data i mange forskellige diagramtyper, undersøge data, lave kurvetilpasning, arbejde med deskriptiv statistik og udføre en hypotesetest. Diagrammer og Statistik er meget tæt forbundet med Lister og Regneark.

Tilføjer du et Diagrammer og Statistik værktød til et tomt dokument, får du blot at vide, at der ikke er nogen lister til stede. Start derfor i Lister og Regneark ☺.

Obs

En *liste* kan fx være en navngivet søjle i et regneark.

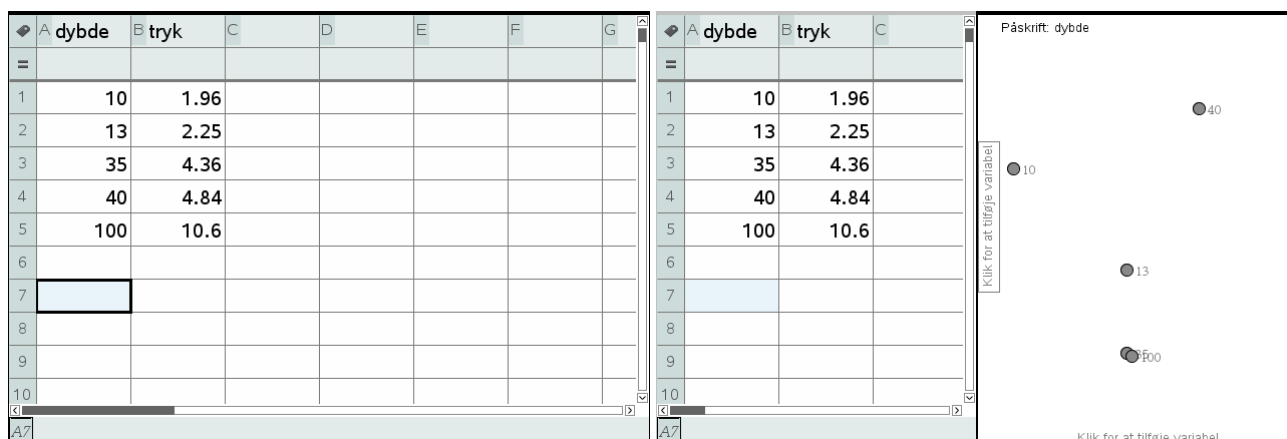
Indtastning og plot af data

Tallene i nedenstående tabel viser trykket i forskellige dybder under havoverfladen

Dybde (m)	10	13	35	40	100
Tryk (atm)	1.96	2.25	4.36	4.84	10.60



Afbild tabellen som et punktdiagram og undersøg sammenhængen mellem dybde og tryk.

Opret et nyt dokument og tilføj et Lister og Regneark værktød. Navngiv de to søjler *Dybde* og *Tryk*.



Obs

Får du behov for at tilpasse søjlebredden, placerer du markøren på skillelinjen mellem to søjler i navnefeltet og trækker den til den ønskede bredde.

Der er flere måder at indsætte et Diagrammer og statistik-værktød. Her gør vi det manuelt ved at vælge lodret opdeling  i sidelayoutmenuen .

Indsæt et Diagrammer og Statistik værktød, og straks kommer der en ustruktureret graf med 5 data-punkter drysset tilfældigt ud over grafrummet.

Tip

X-Y-Punktgrafen kan også tegnes som en hurtiggraf: Marker de to søjler – fx ved at pile helt op i loftet og holde SHIFT nede, mens du piler til højre. Eller klik i A og træk over til B. Højreklik og vælg Hurtiggraf i Data-menuen.

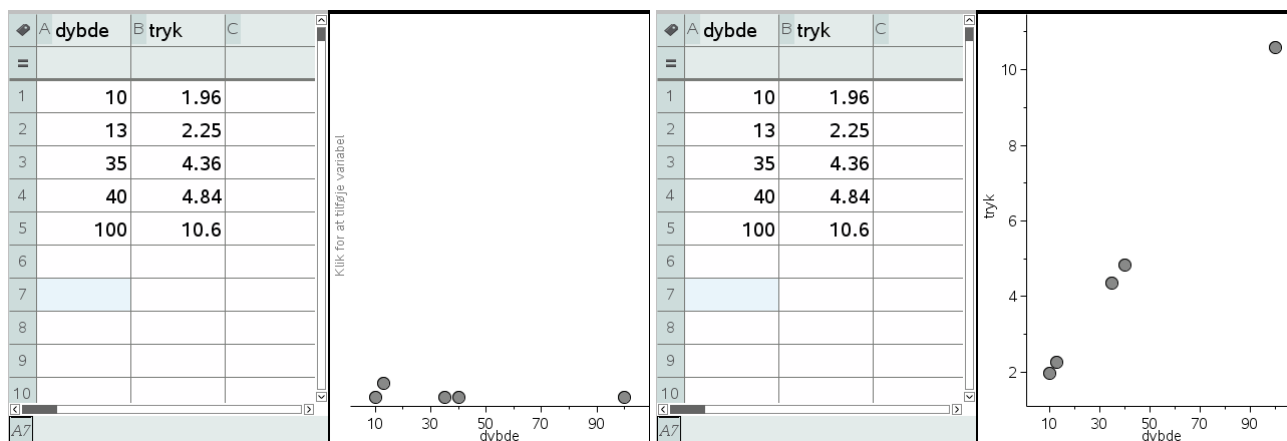
Du skal nu blot fortælle, at dybde skal knyttes til *x*-aksen og trykket skal knyttes til *y*-aksen. I bunden af skærmen klikker du på

[Klik for at tilføje en variabel],

og der kommer en valgliste, med mulige variabler frem. Vælg **dybde** og datapunkterne drysset ned på førsteaksen. Klik derefter i venstre side af skærmen i den lodrette tekst

[Klik for at tilføje en variabel].

Så kommer der igen en valgliste frem, og du vælger her **tryk**.



Lineær regression

Tip

Du slipper af med regressionslinjen med



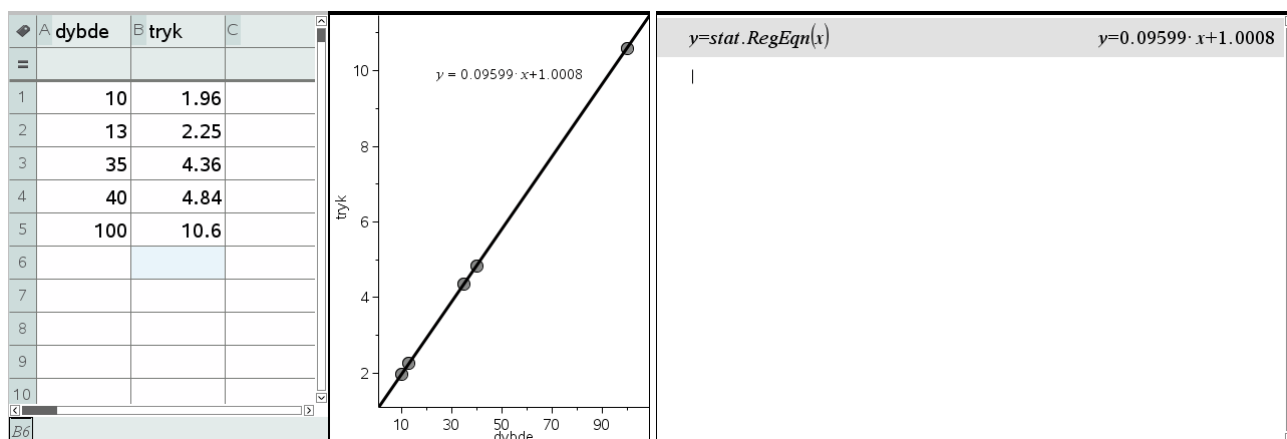
4:Undersøg data ▶
6:Regression ▶ 1:Skjul
lineær

De 5 datapunkter udviser et pænt lineært forløb, så det vil være naturligt at prøve at lægge en ret linje mellem punkterne. Du kan direkte få bestemt den bedste rette linje gennem datapunkterne i Diagrammer og Statistik-værkstedet:

Vælg



4:Undersøg data ▶ 6:Regression ▶ 1:Vis lineær (mx+b)



Tip

Regressionsligningen finder du i Stat.RegEqn ved at trykke på -tasten i Beregninger.

Så let kan det gøres! Læg i øvrigt mærke til, at denne metode ikke er forbeholdt lineær regression. Læg mærke til at regressionsligningen kun vises i grafområdet, så længde regressionslinjen er markeret!

Boxplot

1. Boxplot fra rådata

Man har observeret 16 bilers hastighed gennem en by, hvor den højest tilladte hastighed er 50 km/t. De observerede hastigheder var

70, 61, 55, 60, 52, 49, 72, 54, 48, 53, 47, 62, 49, 51, 52, 50

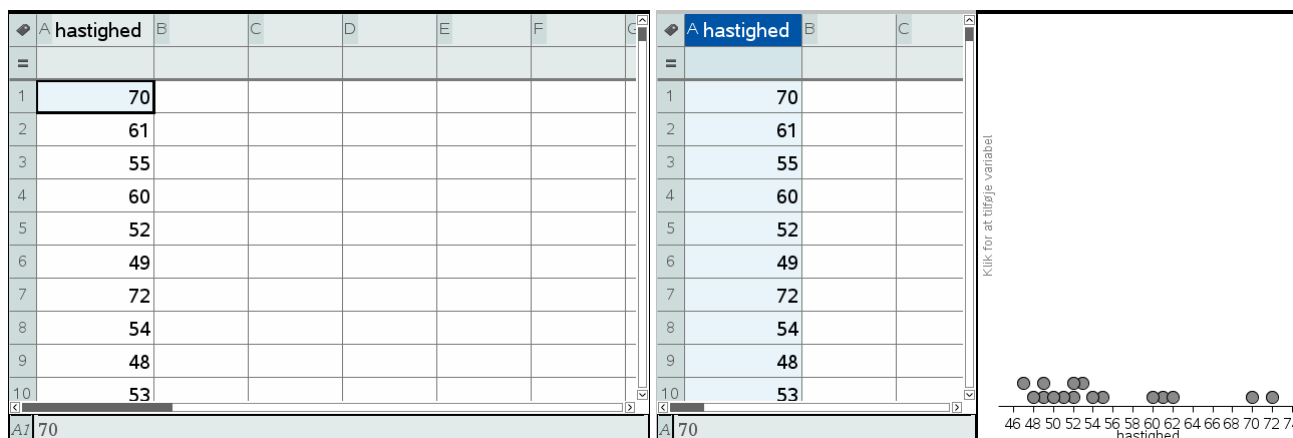
Tegn boxplottet for denne fordeling.

Tip

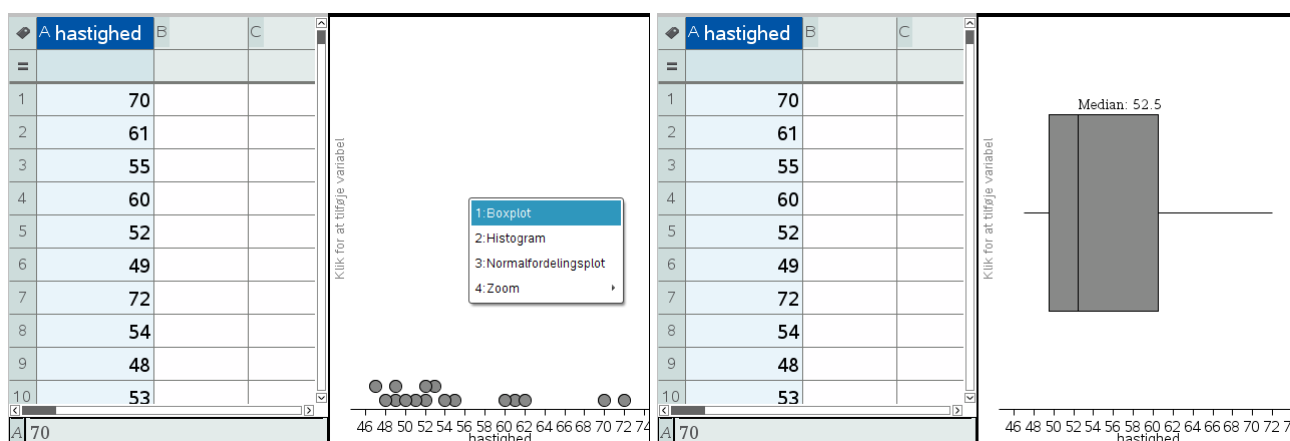
Også denne gang kan du oprette grafen med hurtiggraf ved at markere søjlen, højreklikke og vælge Hurtiggraf fra Data-menuen.

Tast hastighederne ind i en søjle i et Lister og Regneark-værksted. Navngiv søjlen **hastighed** — ellers bliver den ikke tilgængelig i Diagrammer og Statistik-værkstedet.

Tilføj herefter et Diagrammer og Statistik-værksted, og knyt variabelen **hastighed** til x-aksen:



Højre-klik i arbejdsområdet, vælg **Boxplot** i menuen, og boxplottet tegnes. Ved at flytte markøren til boxplottets linjer, kan du få oplyst kvartilsættet:

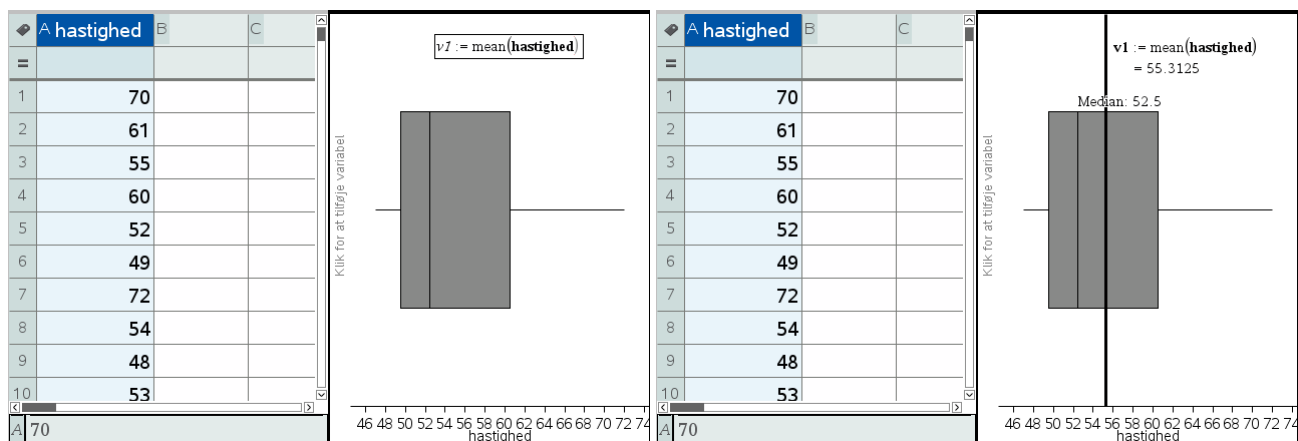


Du kan plote middelværdien sammen med et boxplot:



4:Undersøg data ▶ 8:Plot værdi.

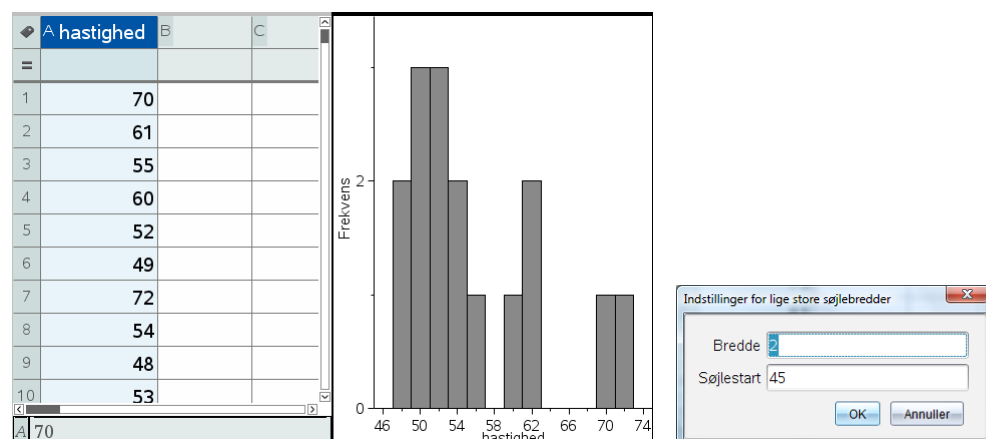
Indtast $\text{mean}(\text{hastighed})$ i det indtastningsfelt, der kommer frem:

**Tip**

Benyt  til at indsætte variabelen hastighed.

Du kan let skifte mellem de forskellige plottyper: Prikplot, Boxplot, Histogram og Normalfordelingsplot. Prøv mulighederne. Nedenfor er vist det standardhistogram, TI-Nspire CAS leverer. Hvis du ønsker større intervaller i histogrammet kan du gribe og trække i skillelinjerne — eller lave (mere præcise) indstillinger ved at kalde histogrammets kontekstmenu frem ved at højre-klikke, og vælge

5:Søjleindstillinger ▶ Lige store intervaller



2. Boxplot efter en hyppighedsliste

Et matematikhold fik til skriftlig eksamen følgende karakterer

<i>Karakter</i>	-3	00	02	4	7	10	12
<i>Hyppighed</i>	2	3	3	5	7	3	2

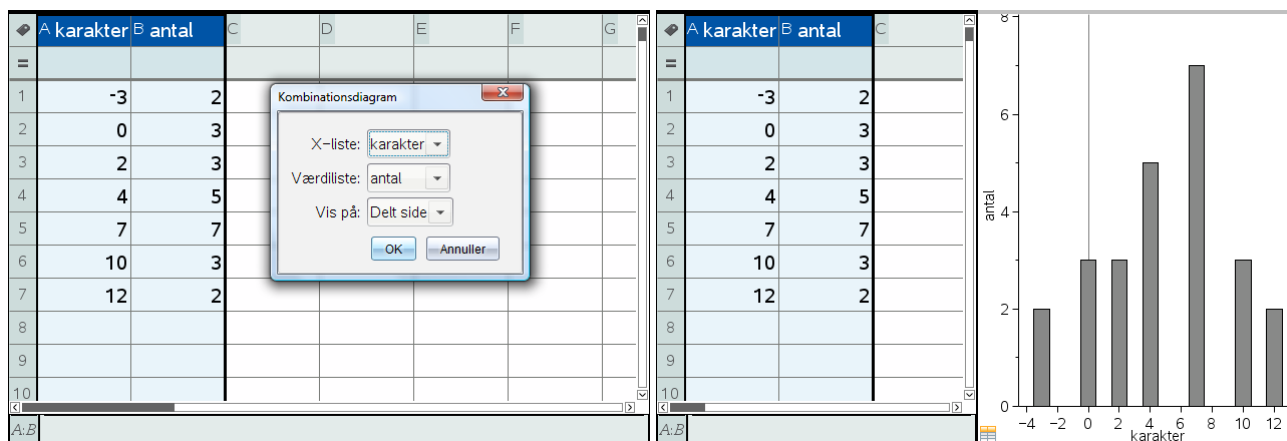
Tegn boxplot for denne fordeling


Tip

Du kan også markere de to søjler, højreklikke og vælge Kombinationsdiagram fra Data-menuen.

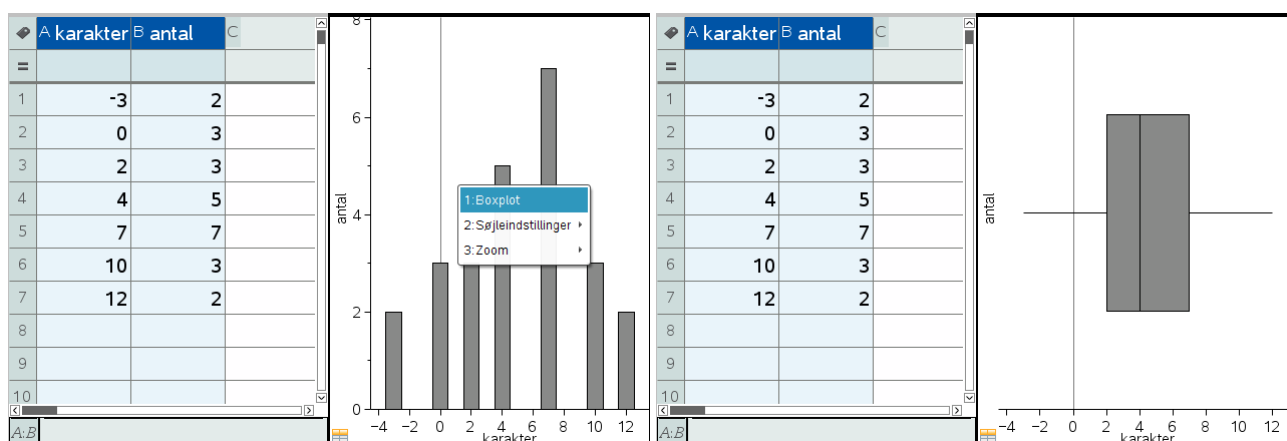
 3:Data ▶ 8:Kombinationsdiagram.

Indstil dialogen som vist på næste side, og tast Enter. Du vil da få tegnet et stolpediagram på en delt side.

**Obs**

Læg mærke til den lille ikon , der dukker op, i nederste venstre hjørne. Den viser, at der er tale om et kombinationsdiagram.

Højreklik for at ændre graftype til boxplot:



3. Sammenligning af boxplot

I to klasser er fraværet for et kvartal opgjort til

<i>Antal dage</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	18	20
<i>Antalelever 1a</i>	1	5	4	5	3	4	2	2	1	1
<i>Antalelever 1b</i>	3	6	2	8	2	3	1	1	0	0

Sammenlign fraværet i de to klasser ved at tegne boxplot for begge.

Tip

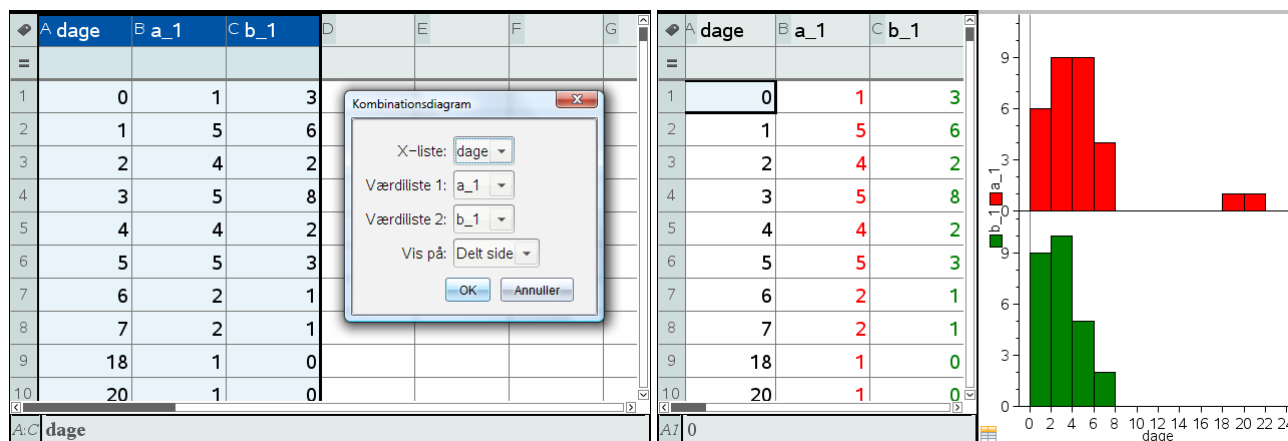
Hvis du ikke markerer området, kan du kun vælge én værdiliste. Du kan dog siden i Diagrammer og Statistik tilføje endnu en værdiliste.

Indtast data i et Lister og Regneark værksted, navngiv søjlerne dage samt a_1 og b_1 (idet et søjlenavn ikke må begynde med et tal 😊) og marker hele dataområdet! Du kan nu få tegnet dataområdet ved at vælge

1,3,5

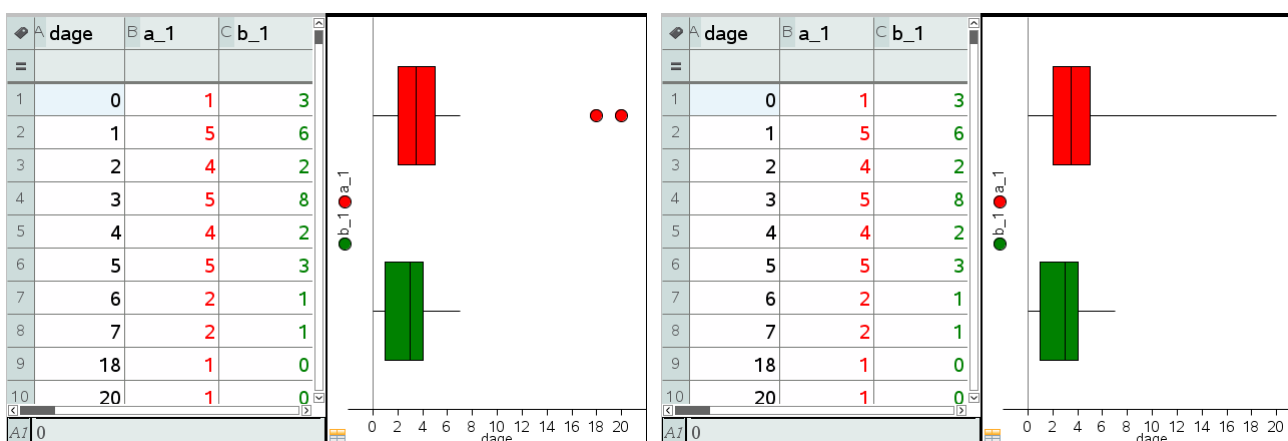
3:Data ▶ 5:Kombinationsdiagram.

Indstil dialogen som vist på næste side, og tast Enter.



Læg mærke til at vi kan farvelægge de to søjlediagrammer individuelt og at vi tilsvarende kan farvelægge tallene i de to tilhørende hyppighedslisters individuelt. Det sker ved at klikke i en søjle i diagrammet henholdsvis en celle i tabellen og anvende farvemenuerne i formatbjælken oven over arbejdsvinduet.

Vi har få tegnet to stolpediagrammer på den delte side. Højreklik for at ændre graf-typen til boxplot. I første omgang fremhæves atypiske observationer, her de to elever med et fravær på 18 henholdsvis 20 dage. Men det kan vi fjerne ved at højreklikke og vælge Udvid boxplotgrænser.



χ^2 -test

1. χ^2 -test for uafhængighed

I dette og det næste afsnit skal du med TI-Nspire CAS regne et par af de opgaver der er i Susanne Christensens artikel "At træffe sine valg i en usikker verden".

En forretningskæde vil undersøge, om farven på indpakningen af nye kartofler påvirker salget. Butikken sælger derfor i en periode poser med samme slags kartofler, alle med 2,5 kg/ pose og til samme pris. Der bliver i alt sendt 600 poser kartofler ud i butikkerne, hvoraf 520 bliver solgt. Af de solgte poser er 375 gule, og der er 55 gule poser tilbage. De øvrige poser er blå.

Undersøg, om der er grundlag for at påstå, at farven påvirker salget af kartofler.

Først skal du lige vha. lidt hovedregning regne ud, at der er solgt 145 blå poser, og der er 25 blå poser tilbage.

Indtast oplysningerne i et Lister og Regneark værktød:

Obs
Søjlenavnene *gul* og *blå* er variabelnavne. Række-
navnene 'Solgt' og 'ikke
solgt' er bare celledokument.

	A	B gul	C blå	D	E	F	G
=							
1	solgt	375	145				
2	ikke solgt	55	25				
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Du skal nu afgøre, om de oplyste data er i rimelig overensstemmelse med nulhypotesen om uafhængighed mellem farve og antal solgte poser. Hertil skal du benytte den indbyggede test for uafhængighed af to variable.

Testen kan klares direkte i Lister og Regneark:

Vælg

X 4:Statistik ▶ 4:Statistiske tests... ▶ 8: χ^2 uafhængighedstest...


Guiden forventer, at du indtaster navnet på en matrix/tabel med observationerne. Dette kan du klare ved at indtaste {gul,blå} idet en liste af lister netop opfattes som en matrix/tabel:

	A	B gul	C blå	D	E	F	G
=							
1	solgt	375	145				
2	ikke solgt	55	25				
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

	A	B gul	C blå	D	E	F	G
=					= χ^2 2way({gul,blå}): Copy		
1	solgt	375	145	Titel	χ^2 -uafhængighedstest		
2	ikke solgt	55	25	χ^2	0.38672		
3				PVal	0.534029		
4				df	1.		
5				ExpMatrix	[[372.66666666667,57...		
6				CompMatrix	[[0.014609421586167,...		
7							
8							
9							
10							

Af skærmbilledet til højre fremgår:

1. χ^2 - teststørrelsen har værdien 0.38672
2. p -værdien er 53.4%, dvs. sandsynligheden for at finde en teststørrelse, der er mindst lige så skæv som den observerede, er 53.4%. Nulhypotesen accepteres altså på signifikansniveauet 5%.
3. Teststørrelsen er χ^2 - fordelt med 1 frihedsgrad.

4. De forventede værdier finder du i matricen ExpMatrix og enkeltbidragene til χ^2 -teststørrelsen finder du i CompMatrix. Vil du se de to matricer sker det nemmest i et Beregnings-værksted, hvor de hentes via -knappen.

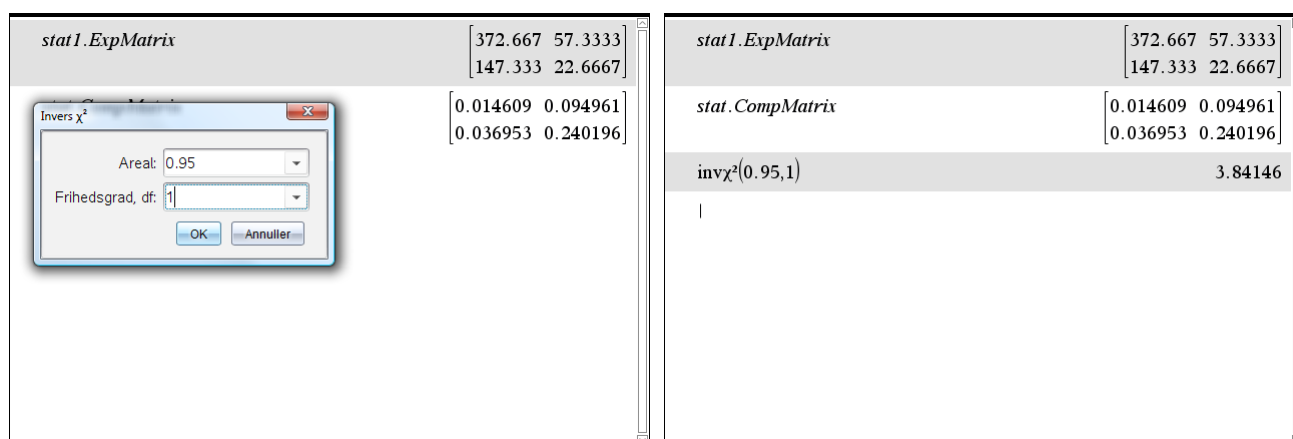
<i>stat1.ExpMatrix</i>	$\begin{bmatrix} 372.667 & 57.3333 \\ 147.333 & 22.6667 \end{bmatrix}$
<i>stat.CompMatrix</i>	$\begin{bmatrix} 0.014609 & 0.094961 \\ 0.036953 & 0.240196 \end{bmatrix}$

Du får ikke oplyst den kritiske værdi for en test på signifikansniveau 5%. Skal du bruge denne, må du selv beregne den. Hertil skal du benytte den inverse χ^2 -fordeling med 1 frihedsgrad. Du kan foretage beregningen i såvel Beregnings-værkstedet som i et Lister og Regneark-værksted. Det nemmeste er i Beregnings-værkstedet:

Vælg

 6:Statistik ▶ 5:Fordelinger ▶ 9:invers χ^2 ,

og indtast som vist:



The screenshot shows two windows from the TI-Nspire CAS software. The left window displays the 'Invers χ^2 ' calculator with 'Areal' set to 0.95 and 'Frihedsgrad, df' set to 1. The right window shows the 'stat1.ExpMatrix' and 'stat.CompMatrix' matrices, and a calculation of $\text{inv}\chi^2(0.95,1)$ resulting in the value 3.84146.

Dette viser, at den kritiske værdi er 3.84. Da χ^2 -teststørrelsen ligger langt under den kritiske værdi kan vi ikke forkaste nulhypotesen.

2. χ^2 -test for Goodness of Fit

Med χ^2 -test Goodness of Fit kan du undersøge, om et observeret datasæt følger en forventet fordeling.

En mindre restaurant med et menukort bestående af 5 forskellige, men faste menuer plejer at have følgende ordrefordeling på disse:

menu 1: 30 %, menu 2: 25 %, menu 3: 20 %, menu 4: 15 % og menu 5: 10 %.

Restauranten foretager sine indkøb for at imødegå en efterspørgsel, der følger dette mønster. Imidlertid er man flere gange i den seneste tid løbet tør for menu 5, og man ønsker at afgøre, om det er en tilfældighed, eller om man skal revidere indkøbsplanerne.

I den seneste uge har man haft 543 gæster. Af disse bestilte 152 menu 1, 101 bestilte menu 2, 110 bestilte menu 3, 91 bestilte menu 4 og 89 bestilte menu 5.

Skal man revidere indkøbsplanerne?

Hypotesen H_0 er her, at ordrefordelingen i den sidste uge (stikprøven) ikke adskiller sig signifikant fra den sædvanlige ordrefordeling. Dvs., at den forventede ordrefordeling blandt de 543 gæster kan beregnes vha. de givne procenter

Opret et nyt Lister og Regneark værksted, tast oplysningerne ind og beregn de forventede værdier (med en celleformel):

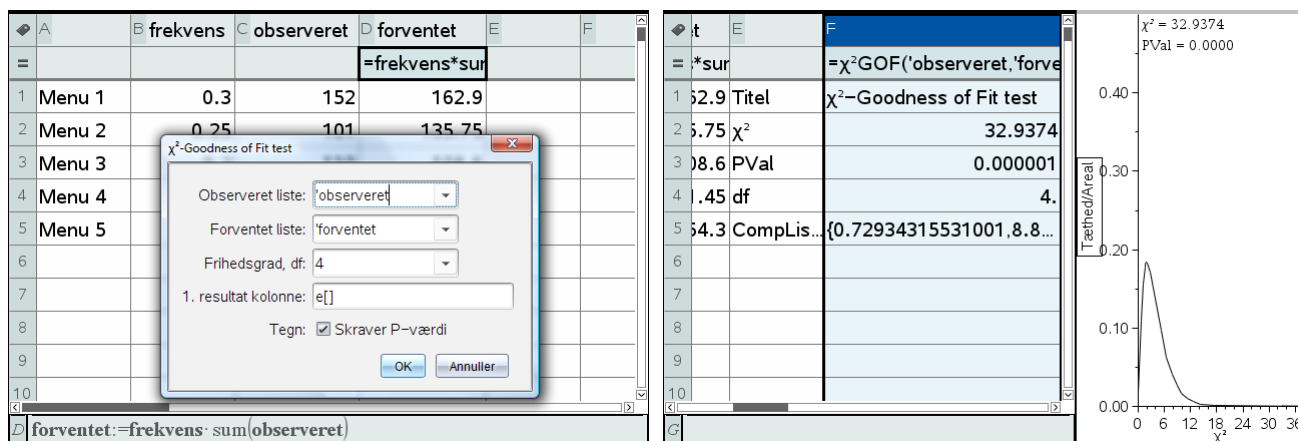
A	B frekvens	C observeret	D forventet	E	F
=			=frekvens*sum		
1	Menu 1	0.3	152	162.9	
2	Menu 2	0.25	101	135.75	
3	Menu 3	0.2	110	108.6	
4	Menu 4	0.15	91	81.45	
5	Menu 5	0.1	89	54.3	
6					
7					
8					
9					
10					
forventet:=frekvens*sum(observeret)					

Vælg

 4:Statistik ▶ 4:Statistiske tests... ▶ 7: χ^2 Goodness of Fit test.

Guiden forventer, at du giver navnet på en liste med observerede værdier (**observeret**), en liste med forventede værdier (**forventet**) og antallet af frihedsgrader (antal rækker - 1 = 4).

Denne gang får vi også tilbudt en grafisk illustration af testen, hvilket vi bør tage imod ☺:



p-værdien er her meget lille (0.000001), så lille, at restauranten må tage deres indkøbsplaner op til revision.

Vi har måttet regulere på grafen for at kunne få plads til teststørrelsen. Denne gang er p-værdien er dog så lille at arealet til højre for teststørrelsen ikke kan ses på grafen!

3. Terningespil

Du har en mistanke om, at en af dine venner har en "falsk" terning.

Derfor har du i al hemmelighed noteret udfaldet af alle vedkommendes kast med terningen gennem en hel aftens spil. Dine optegnelser viser, at terningen er endt på "1" i alt 5 gange, "2" i alt 4 gange, "3" i alt 5 gange, "4" i alt 6 gange, "5" i alt 5 gange og "6" i alt 13 gange.

Giver dine observationer anledning til at din mistanke bestyrkes?

Nulhypotesen H_0 er her, at terningen er "ægte". Du forventer således en ligelig fordeling af øjentalene i de 38 observationer. Indtast oplysningerne i et Lister og Regneark værktød:

Tip

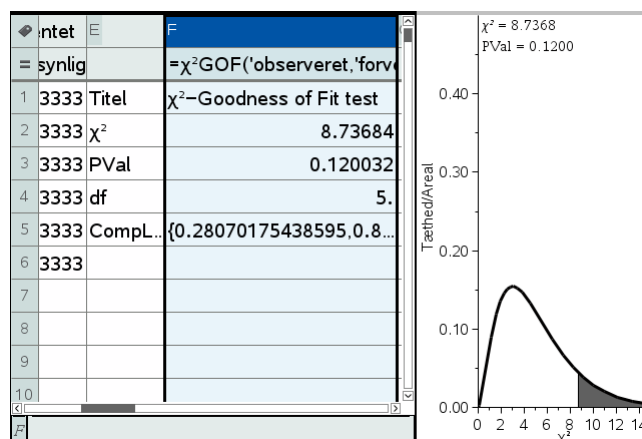
Læg mærke til at man kan tvinge regnearket til at regne numerisk ved at gange med 1. i formlen (altså et decimalpunktum).

	A udfald	B sandsynlighed	C observeret	D forventet
				=sandsynlig
1	etter	1/6	5	6.33333
2	toer	1/6	4	6.33333
3	treer	1/6	5	6.33333
4	firer	1/6	6	6.33333
5	femmer	1/6	5	6.33333
6	sekser	1/6	13	6.33333
7				
8				
9				
10				
D	forventet:=sandsynlighed·sum(observeret)·1.			

Vælg

\bar{X} 4:Statistik ▶ 4:Statistiske tests... ▶ 7: χ^2 Goodness of Fit test.

Guiden forventer, at du giver navnet på en liste med observerede værdier (**observeret**), en liste med forventede værdier (**forventet**) og antallet af frihedsgrader (antal rækker - 1 = 5):



Med en p-værdi på 0.12 er der således ingen statistisk evidens mod 0-hypotesen.

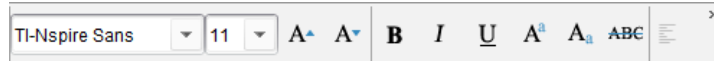
7

Noter

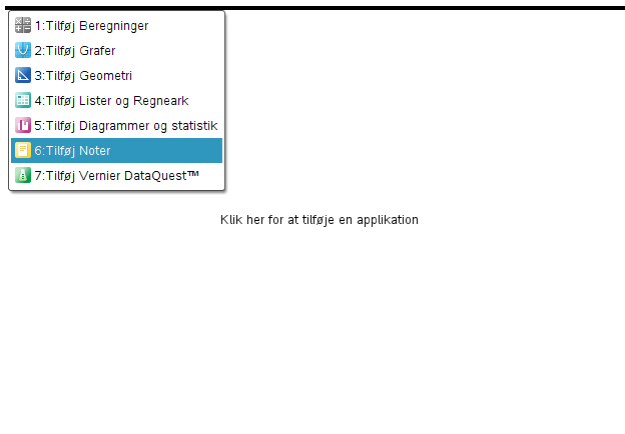
I værktødet Noter kan du skrive og formatere den tekst, der skal ledsage din opgave. I teksten kan du indsætte formler, figurer og specialtegn

Indtastning af tekst

Opret et nyt dokument og tilføj et Note-værksted. Læg mærke til at formateringsbjælken nu er aktiv:

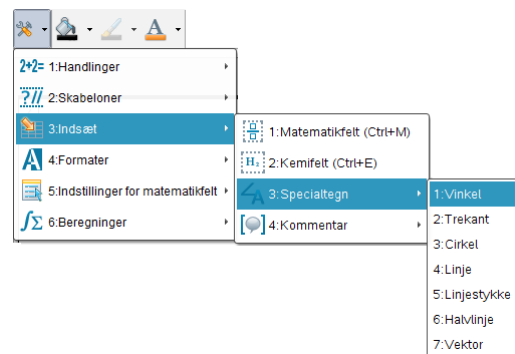
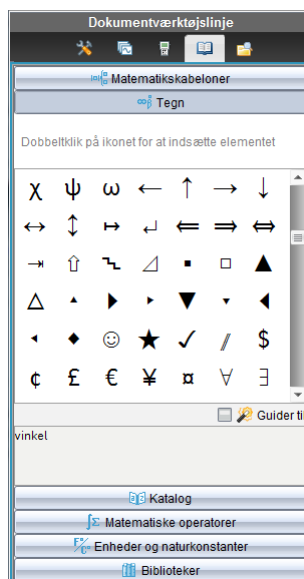


Når du skriver tekst, kan du altså frit vælge skrifttype, skriftstørrelse osv. Du kan også frit kombinere om skriften skal vises i **fed**, *kursiv*, understreget osv.



At skrive tekst i Note-værkstedet går altså helt af sig selv ved at benytte computerens tastatur. Specialtegn indsættes fra Tegn-fanen i sidepanelet (under Hjælpeprogrammer) eller fra menupunktet der indeholder skabeloner til de vigtigste notationer i geometri:

3:Indsæt ▶ 3:Specialtegn



Indtastning af formler

Tip

De almindelige genveje til *kopier* Ctrl/Cmd C og *indsæt* Ctrl/Cmd V kan også benyttes i TI-Nspire CAS. Du kan således fx kopiere fra Beregninger til Noter.

Indsæt et nyt Note-værksted med Ctrl/Cmd I. Du skal nu indtaste denne tekst i Noter:

$$\text{Ligningen } x^2 = 2 \text{ har løsningen } x = \sqrt{2} \text{ eller } x = -\sqrt{2}$$

Teksten indeholder to *matematikfelter*, nemlig selve ligningen og løsningen. Start med at indtaste ordet “Ligningen” efterfulgt af mellemrum.

Tip

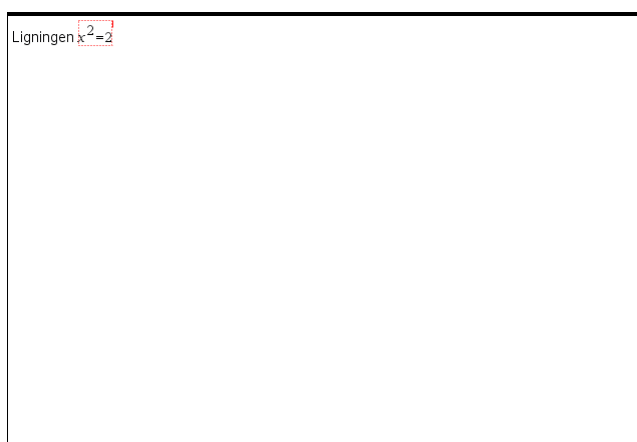
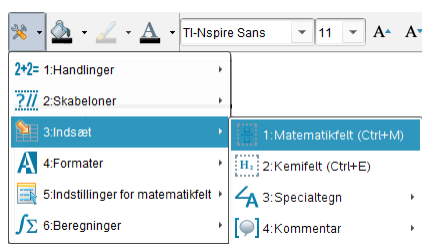
Genvejen til et matematikfelt er Ctrl/Cmd M.

Vælg nu menupunktet



3:Indsæt ▶ 1:Matematikfelt,

(eller højreklik) og skriv $x^2 = 2$ i feltet. Tryk på → for at komme ud af matematikfeltet.



Tip

Hvis du har løst ligningen i et Beregnings-værksted, kan du hente en kopi og indsætte denne. Matematikfeltet indsættes da automatisk.

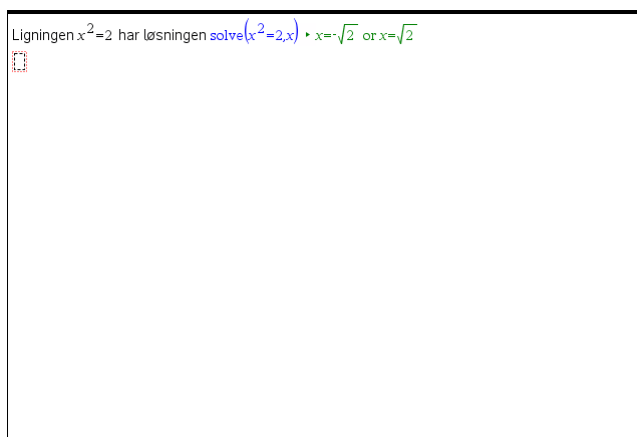
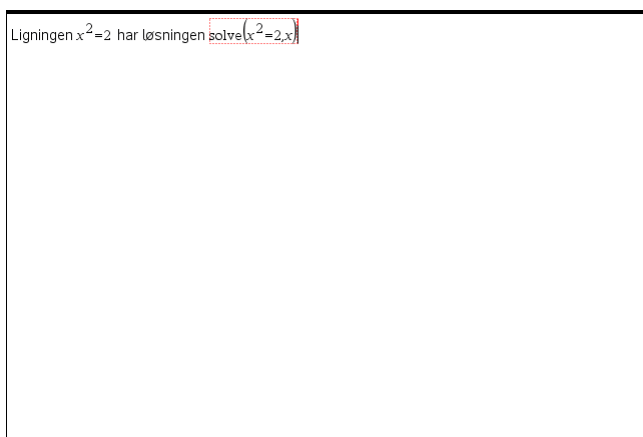
Skriv så “ har løsningen ”. Indsæt et nyt matematikfelt (gerne med Ctrl/Cmd M), hvori du indsætter kommandoen, der løser ligningen. Hertil kan du bruge

⌚ 6:Beregninger ▶ 3:Algebra ▶ 1:Løs ligning

Læg mærke til at du har adgang til stort set alle matematikkommandoerne fra menuen

⌚ 6:Beregninger

Hvis du taster Enter mens du er i matematikfeltet, så vil TI-Nspire CAS løse ligningen og returnere løsningen (højre skærmbillede nedenfor)

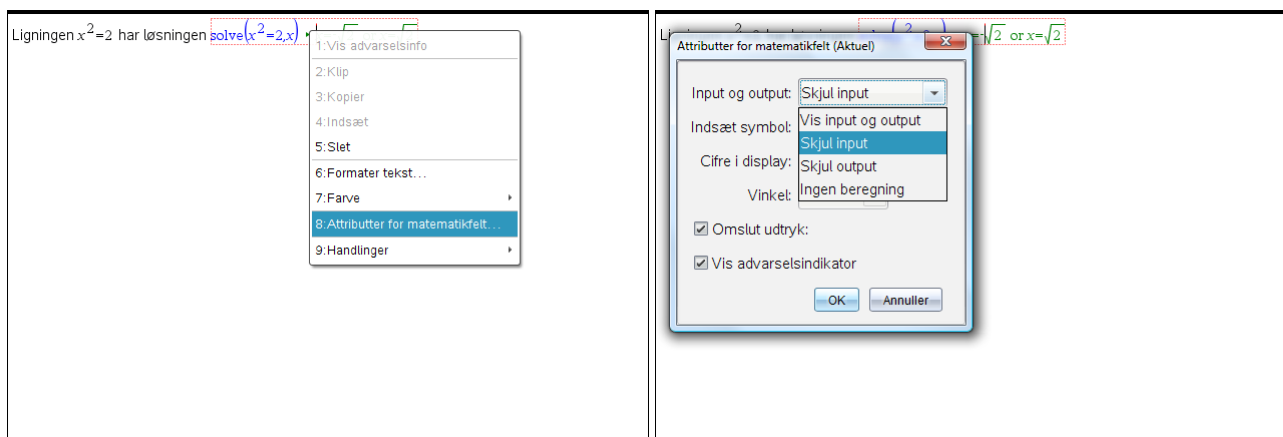


Resultatet er dels at ligningen løses, dels at et nyt matematikfelt indsættes automatisk på næste linje. Det nye matematikfelt skal slettes igen ☺

Tip

Du løser ligningen numerisk ved at taste Ctrl/Cmd Enter

Højre-klik i matematikfeltet og indstil som vist nedenfor

**Tip**

Alternativt kan du benytte $2+2=$ 1: Handlinger
▶ 3: Udregn deludtryk og udskift med svar (her undgår du, at udskriften er grøn).

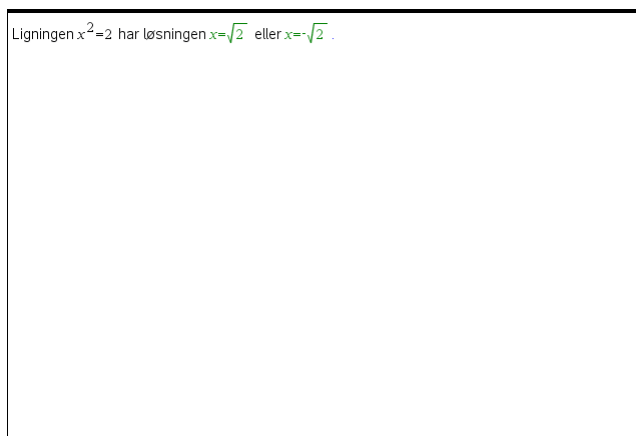
Med skjult input ser resultatet således ud (efter du er trådt ud af matematikfeltet!):

$$\text{Ligningen } x^2=2 \text{ har løsningen } x=-\sqrt{2} \text{ or } x=\sqrt{2}$$

Så er vi næsten færdige med indskrivningen. Det ser dog ikke pænt ud at der står "or" i stedet for eller. Da vi ikke kan rette i et output, må vi i stedet tilrette ligningen, så den kun har en positiv løsning. Klikker du i matematikfeltet kan du indsætte begrænsningen $|x > 0$ og igen taste Enter. Så får du kun vist den positive løsning. Fortsæt udenfor matematikfeltet med at skrive eller og indsæt en kopi af matematikfeltet, hvor du udskifter begrænsningen med $|x > 0$

Obs

Når du begynder at redigere i input forsvinder output



Endelig kan du slippe af med den grønne farve ved at sværte matematikfelterne til og farve teksten sort ☺

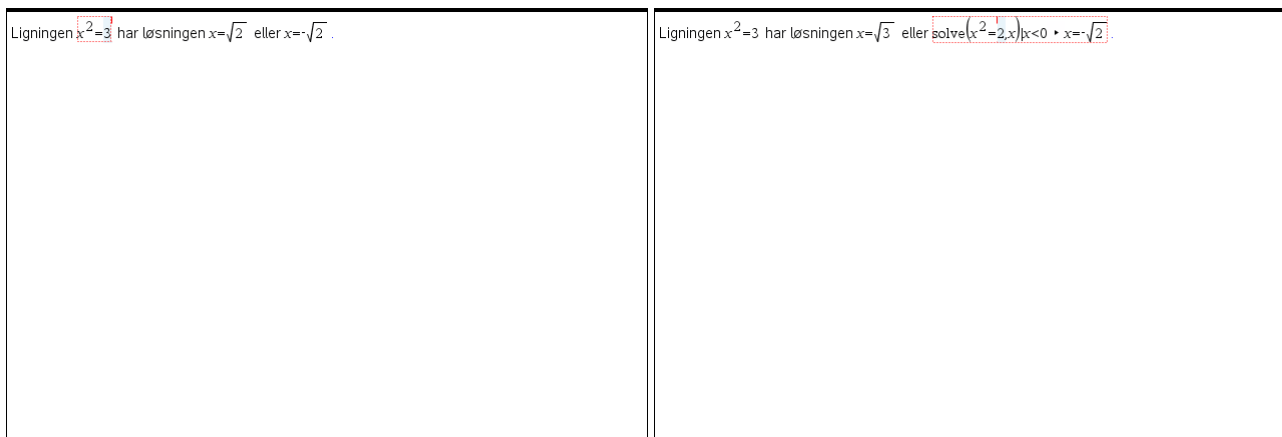
Om at rette i formler

En af de store fordele ved at arbejde i Note-værkstedet (fremfor Beregningsværkstedet) er, at du kan redigere i en indtastning uden at skulle lave en kopi.

Du skal nu ændre teksten til




Ligningen $x^2 = 3$ har løsningen $x = \sqrt{3}$ eller $x = -\sqrt{3}$

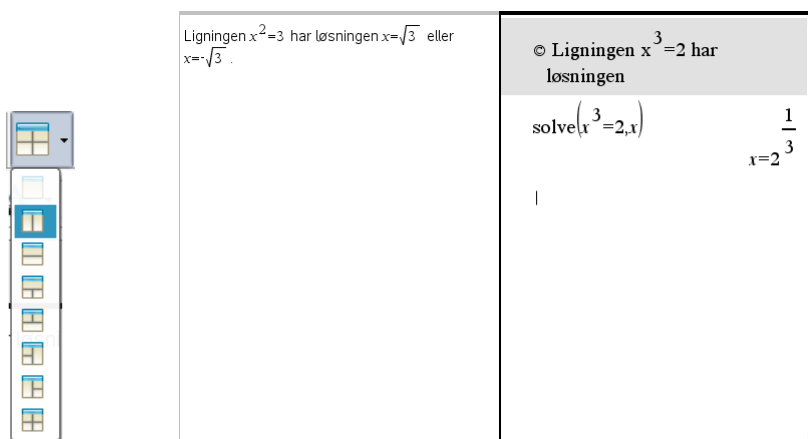
At ændre til $x^2 = 3$ går helt af sig selv. Den anden ændring er lidt mere kompliceret, da inputtet jo er skjult, men hvis du klikker i matematikfeltet, kommer inputtet til syne, og du kan redigere. Afslut med **Enter**:




Samspillet med Beregnings-værkstedet

Hvis du placerer et Beregnings-værksted og et Note-værksted i to nabovinduer kan du *trække* dine beregninger fra Beregnings-værkstedet over i Note-værkstedet. Det er smart, hvis du vil lave pæne opgavebesvarelser.

Åbn Sidelayout-menuen  og vælg layouttype 2 , dvs. lodret split (eller layouttype 3, dvs. vandret split ):



I Beregnings-værkstedet har vi nu tilsvarende løst ligningen $x^3 = 2$. Sværter vi nu et matematikfelt til, kan vi trække det over i Note-værkstedet som et matematikfelt, idet markøren ændres til en gribende hånd :

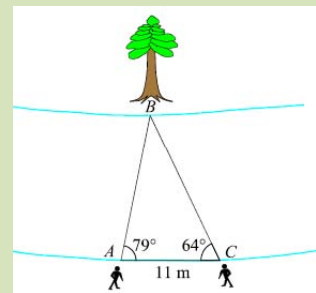
Ligningen $x^2=3$ har løsningen $x=\sqrt{3}$ eller $x=-\sqrt{3}$.	© Ligningen $x^3=2$ har løsningen <code>solve(x³=2,x)</code> $x=2^{\frac{1}{3}}$	Ligningen $x^2=3$ har løsningen $x=\sqrt{3}$ eller $x=-\sqrt{3}$. <code>solve(x³=2,x)</code>	© Ligningen $x^3=2$ har løsningen <code>solve(x³=2,x)</code> $x=2^{\frac{1}{3}}$
--	---	---	---

Men vi kan *ikke* trække tekstfelter (kommentarer) over i Note-værkstedet, idet de også konverteres til matematikfelter. Beregnings-værkstedet egner sig derfor bedst til kladdeberegninger, hvor de beregninger, der løser opgaven, efterfølgende trækkes over i Note-værkstedet.

En opgave løst i Note-værkstedet

To personer bestemmer en flods bredde vha. et målebånd og en vinkelmåler. De to personer står med 11 meters afstand og måler sigtevinklerne A og C til et træ på den anden side af floden. Vinkel A måles til 79° og vinkel C til 64° (se figur)

- Bestem $|BC|$
- Bestem flodens bredde, dvs. højden fra B i trekant ABC



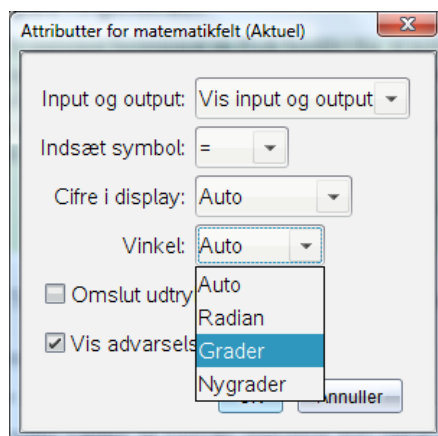
Nedenfor ser du opgaven løst i et Note-værksted (idet du husker at vinkler måles i grader!)

<p>Opgave i trigonometri</p> <p>To personer bestemmer en flods bredde vha. et målebånd og en vinkelmåler. De to personer står med 11 meters afstand og måler sigtevinklerne A og C til et træ på den anden side af floden. Vinkel A måles til 79° og vinkel C til 64° (se figur)</p> <ol style="list-style-type: none"> Bestem BC Bestem flodens bredde, dvs. højden fra B i trekant ABC 	
<p>a) Til bestemmelse af BC benyttes sinusrelationen: $\frac{\sin(A)}{BC} = \frac{\sin(B)}{AC}$</p> <p>Først bestemmes vinkel B:</p> $B = 180 - A - C = 180 - 79 - 64 = 37$ <p>Derefter sættes de kendte størrelser ind i sinus-relationen</p> $\text{solve}\left(\frac{bc}{\sin(79)} = \frac{11}{\sin(37)}, bc\right) \cdot bc = 17.9422$ <p>Dette viser, at siden BC har længden <u>17.94</u>.</p>	<p>b) Flodens bredde:</p> <p>Højden fra B har et fodpunkt, der kaldes F. Da $\triangle BCF$ er retvinklet kan vi finde højden h således: $\sin(C) = \frac{h}{BC}$.</p> <p>Tallene indsættes og der løses for h:</p> $\text{solve}\left(\sin(64) = \frac{h}{17.9422}, h\right) \cdot h = 16.1263$ <p>Flodens bredde er altså <u>16.1 meter</u></p>

Nok så vigtigt at være opmærksom på er dog metoden til at styre de trigonometriske beregninger i Note-værkstedet. Her skal man være særlig opmærksom på om man arbejder i *grader* eller i *radianer*. Som udgangspunkt er indstillingerne i TI-Nspire CAS sat til at arbejde i radianer med undtagelse af geometri-værkstedet, der arbejder i grader. Disse standardindstillinger bør man *ikke* ændre på, da det kan få overraskende og helt utilsigtede virkninger i nogle af værktøjerne, hvis man har glemt hvad

vinkelmålet er indstillet til, lige fra problemer med graftegning til problemer med løsning af differentialligninger!

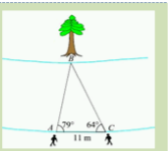
Men i Note-værkstedet kan man sætte vinkelmålet i de enkelte matematikfelter! Det sker under attributter. Som standard er det sat til **Auto**, dvs. det henter de generelle indstillinger (der altså vil være radianer, hvis man ikke har pillet ved de generelle indstillinger). Men netop i trigonometriopgaver som den ovenstående kan man altså ændre dem til grader:



I løsningen af opgaven er der ellers kun benyttet teknikker beskrevet ovenfor — dog lige bortset fra, at reducé -tegnet \triangleright er ændret til et lighedstegn $=$ i udregningen af vinkel B . Det gør du ved at højre-klikke på det pågældende matematikfelt, vælge **Attributter for matematikfelt** og indstille i **Indsæt symbol**:

Opgave i trigonometri

To personer bestemmer en flods bredde vha. et målebånd og en vinkelmåler. De to personer står med 11 meters afstand og måler sigtevinklerne A og C til et træ på den anden side af floden. Vinkel A måles til 79° og vinkel C til 64° (se figur)



a) Bestem $|BC|$
b) Bestem flodens bredde, dvs. højden fra B i trekant ABC

a) Til bestemmelse af $|BC|$ benyttes sinusrelationen: $\frac{\sin(A)}{BC} = \frac{\sin(B)}{AC}$

Først bestemmes vinkel B :
 $B = 180 - A - C = 180 - 79 - 64 = 37$

Derefter sættes de kendte størrelser ind i sinus-relationen:
 $\text{solve}\left(\frac{bc}{\sin(79)} = \frac{11}{\sin(37)}, bc\right)$

Dette viser, at siden BC har længden 17.94

Opgave i trigonometri

Attributter for matematikfelt (Aktuel)

Input og output: Vis input og output
Indsæt symbol: =
Cifre i display: Ingen
Vinkel: =

Omslut udtrykk
 Vis advarselsinfo

De to personer bestemmer en flods bredde vha. et målebånd og en vinkelmåler. De to personer står med 11 meters afstand og måler sigtevinklerne A og C til et træ på den anden side af floden. Vinkel A måles til 79° og vinkel C til 64° (se figur)

a) Bestem $|BC|$
b) Bestem flodens bredde, dvs. højden fra B i trekant ABC

a) Til bestemmelse af $|BC|$ benyttes sinusrelationen: $\frac{\sin(A)}{BC} = \frac{\sin(B)}{AC}$

Først bestemmes vinkel B :
 $B = 180 - A - C = 180 - 79 - 64 = 37$

Derefter sættes de kendte størrelser ind i sinus-relationen:
 $\text{solve}\left(\frac{bc}{\sin(79)} = \frac{11}{\sin(37)}, bc\right) \rightarrow bc = 17.9422$

Dette viser, at siden BC har længden 17.94

Tilbage er blot at få opgaven skrevet ud ☺.

8

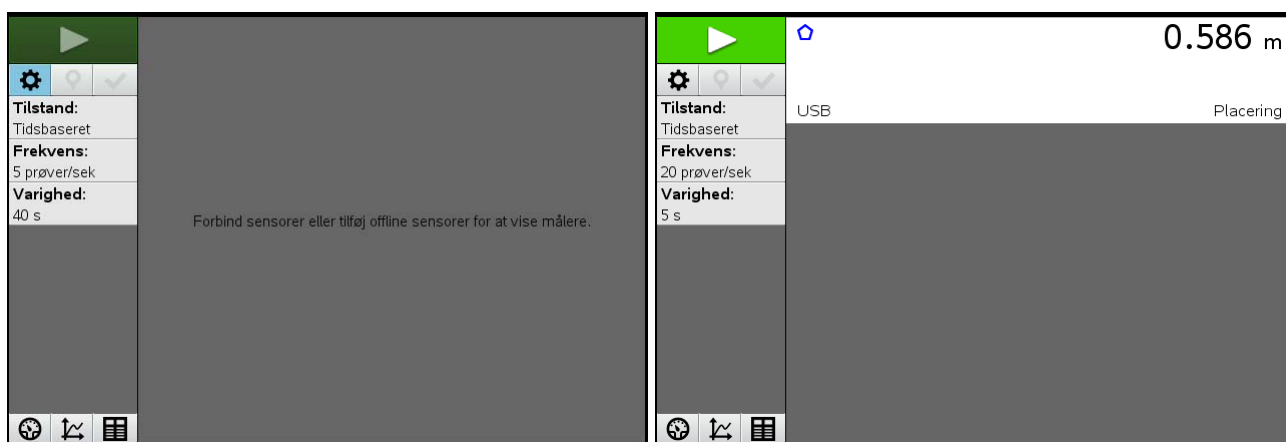


Vernier DataQuest™

Vernier DataQuest er en implementering af Verniers datalogger LabQuest. Hvis du er fortrolig med Verniers LabQuest eller deres dataopsamlingsprogram Logger Pro, kender du de vigtigste funktioner i DataQuest-værkstedet.

Men det er også designet, så det kan spille sammen med resten af TI-Nspire CAS programmet.

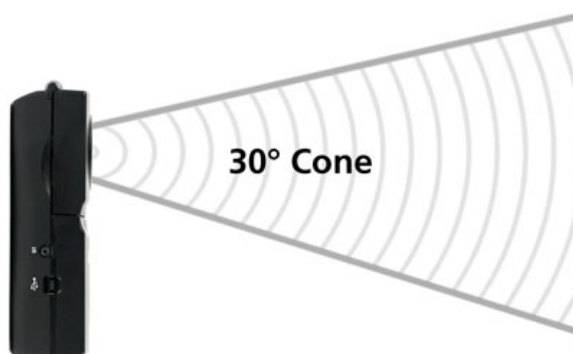
Åbner du for Vernier DataQuest-værkstedet får du et arbejdsområde, der er opdelt i et oplysningspanel til venstre og et tomt datavindue til højre, hvor der står at du skal forbinde en sensor eller tilføje en off-line sensor (dvs. en sensor, der allerede har taget målinger off-line, og som nu skal aflæses).



Tip

Hvis du ikke allerede har åbnet for DataQuest-værkstedet åbnes dette automatisk, når du tilslutter en sensor.

Der arbejdes med sensorer/målere, der forbindes til PC'en eller MAC'en via et USB-stik. Nogle sensorer kan forbindes direkte andre via tilslutningsenheder. Man kan også tilslutte flere enheder ad gangen, fx via forskellige USB-stik på PC'en eller MAC'en, men her vil vi blot se på en enkelt sensor for at illustrere ideen. Vi vælger da en simpel sensor af særlig interesse for matematik, nemlig afstandsmåleren Go! Motion. Denne tilsluttes direkte til computeren via det medfølgende USB-stik.



Verniers Go! Motion virker som på samme måde som en flagermus, idet den kontinuerligt udsender ultralyd, der kastes tilbage fra omgivelserne. NB! Flagermusen er generet, så afstanden skal helst være mindst 1 meter!

Vi ser da straks at arbejdsområdet nu viser en måling, her en afstand på 0.586 m, at målingen er tidsbaseret og at et eksperiment varer 5 sekunder, hvor der tages 20 målinger i sekundet, dvs. i alt 100 målinger.

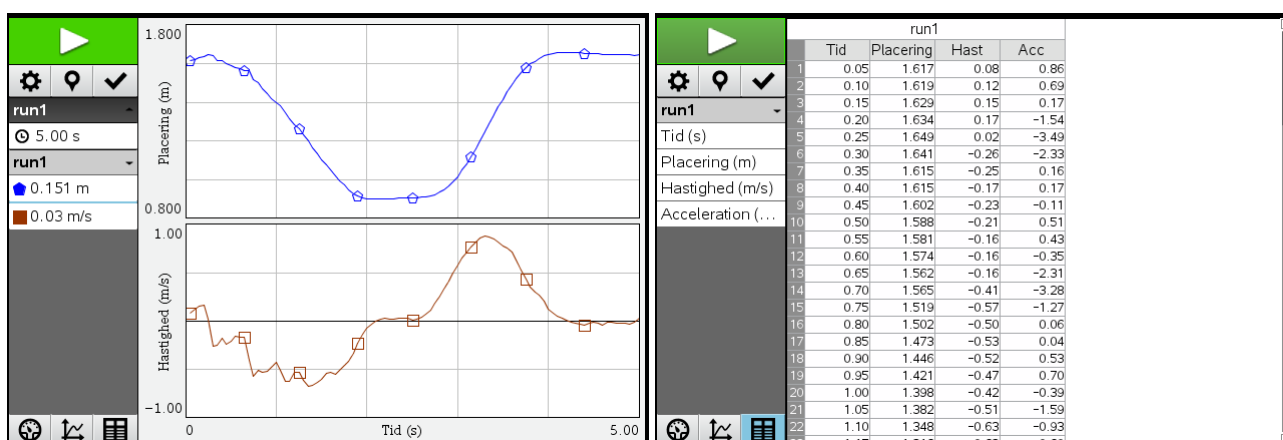
Afstandsmåleren virker ved at man placerer en genstand foran afstandsmåleren, der kan kaste ultralydssignalet tilbage. Afstanden udregnes ud fra tidsforsinkelsen. For at få et tydeligt signal kan det være nødvendigt at bruge en plade eller lignende, der gør det nemmere for afstandsmåleren at fange signalet.

Mit første eksperiment

Hvis vi nu bevæger os foran ultralydssonden kan vi optage vores bevægelse ved at klikke på startknappen



Mens eksperimentet kører forvandles den til en rød stop-knap. Vi bevæger os først hen mod sonden, står derefter stille et øjeblik og bevæger os til sidst væk fra sonden:



Tip

Hvis dit eksperiment driller i første omgang kan du starte et nyt eksperiment ved hjælp af menupunktet

- 1: Eksperiment
- ▶ 1: Nyt eksperiment

Den første datakørsel registreres som datasættet run1. Som standard vises grafvisningen, hvor man både ser placeringen (afstanden) og hastigheden som funktion af tiden. Ved at klikke på fanen for tabelvisning nederst i oplysningspanelet




kan vi skifte til tabelvisningen. Vi ser da at sonden også registrerer accelerationen for bevægelsen.

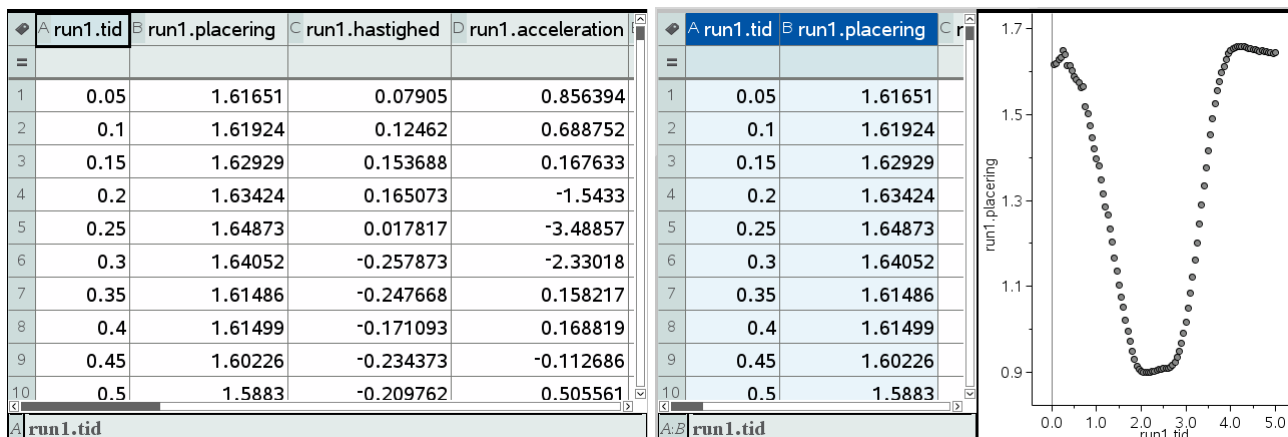
Analyse af eksperimentet

Når vi nu skal undersøge data står vi overfor et grundlæggende valg: Vil vi helt bruge TI-Nspire CAS egne analyseværktøjer fx fra værkstederne Lister og regneark kombineret med Diagrammer og statistik eller vil vi hellere bruge DataQuest-værkstedets egne analyseværktøjer?

Vælger vi at skifte til Lister og regneark kombineret med Diagrammer og statistik skal vi blot vælge menupunktet


 7:Send til ▶ 1: Lister og regneark

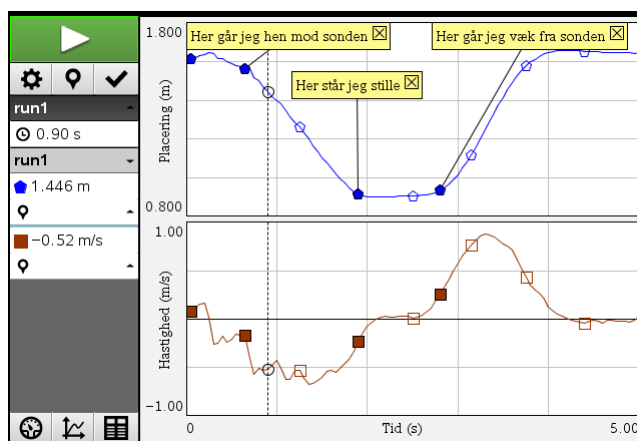
Der oprettes automatisk et Lister og regneark-værksted med de optagne data. Herefter kan vi på sædvanlig vis indsætte fx en hurtiggraf med (tid,sted)-dataene:



Her vil vi dog blive i DataQuest-værkstedet for at illustrere nogle af de muligheder, der er specielle for netop dette værktød 😊

1. Sporing og markering af vigtige begivenheder


Hvis du klikker i (tid,sted)-grafene dukker der en sporing op på grafen. Du kan nu bruge piletasterne til at rykke frem og tilbage langs grafen og aflæse de tilhørende koordinater i oplysningspanelet. Ved 'interessante' punkter på grafen kan du tilføje en kommentar ved at klikke på kommentar-ikonet  i oplysningspanelet:



Du kan også undersøge hastigheden du bevæger dig med ved at finde hældningen af grafen. Det kan gøres på mange forskellige måder. Her er et par stykker 😊

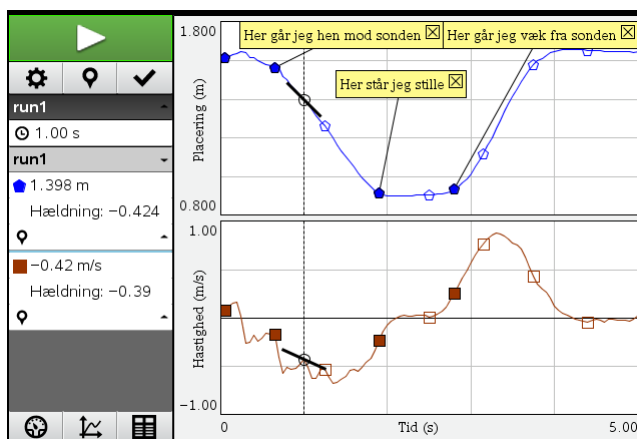
2. Hældningen for en punktgraf/tangent

Vi kan tilføje en tangent til grafen ved at vælge menupunktet

 4:Undersøg data ▶ 2:Tangent

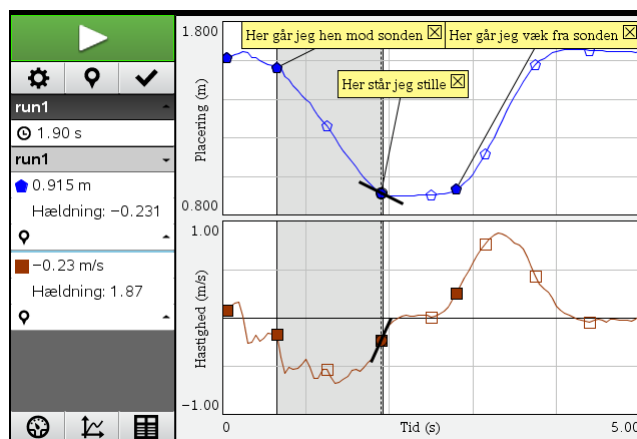
(eller ved at højreklikke på grafen). Straks dukker der et lille linjeelement op på grafen, som følger med rundt ved sporingen. Du kan aflæse tangenthældningen i oplysningspanelet. Så til fx tiden 1.00 s er hældningen for stedgrafene -0.424 m/s, mens hældnin-

gen for hastighedsgrafen er -0.39 m/s^2 . Hældningen for stedgrafen er selvfølgelig den samme som værdien af hastigheden aflæst på hastighedsgrafens ☺ Data Quest bruger en raffineret *listedifferentiation* til at udregne tangenthældningen for en punktgraf baseret på to lister. Det er faktisk netop sådan hastighedsgrafens fremkommer. Hastigheden måles ikke direkte af ultralydssonden (selv om dopplereffekten kunne være brugt til dette formål). Den finder alene afstanden og udregner derefter hastigheden (og bagefter accelerationen).




3. Lineær regression

Vi kan også vælge et udsnit af grafen svarende til det stykke, hvor vi bevæger os hen mod ultralydssonden. Det sker ved at trække med musen fra det ene endepunkt til det andet eller endnu mere præcist at trække musen ned gennem tabellen (her fra 0.65 sekunder til 1.90 sekunder)

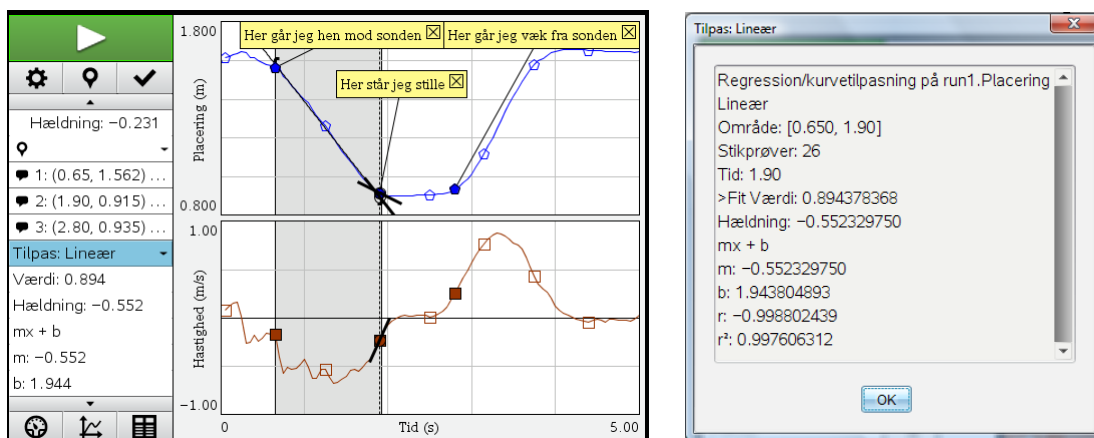


Så snart vi har valgt udsnittet kan vi arbejde videre med dette. Fx kan vi indlægge en ret linje ved hjælp af lineær regression:

 4: Undersøg data ▶ 6: Regression/kurvefitning ▶
1:run1.placering ▶ 1:lineær

(der er to grafer så vi skal vælge om det er sted-grafen eller hastighedsgrafens vi vil modellere).

Vi får da tegnet den lineære regression ind på sted-grafen, der følger den rette linje pænt på det viste udsnit. Vi får også registreret diverse informationer om den lineære regression, dels i form af en oplysningsboks om den lineære regression



Men vi kan også som vist se informationerne i oplysningspanelet: Regressionsligningen har hældningen -0.55 m/s, hvor hastigheden er negativ, fordi vi bevæger os hen mod sonden. I modsætning til tangenthældningen der svinger op og ned, er dette altså en form for gennemsnitshastighed.

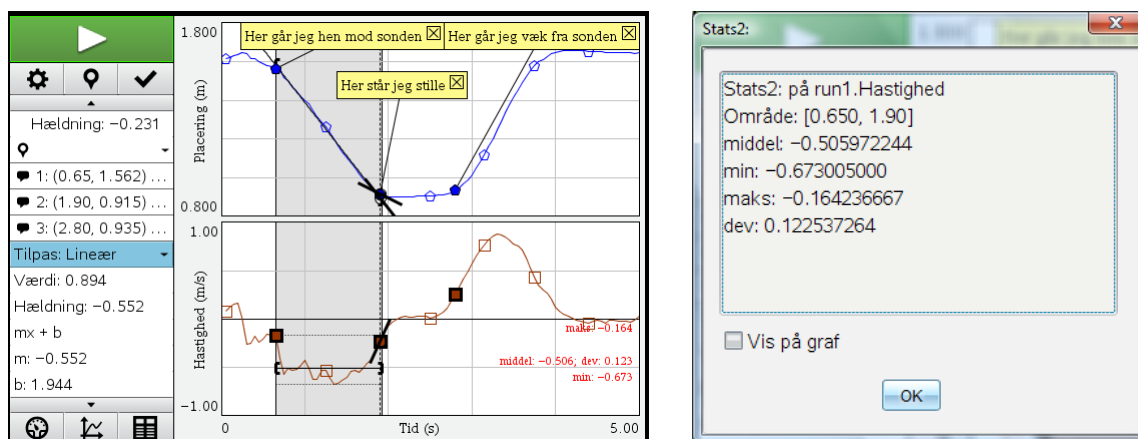
4. Statistik

Endelig kan vi finde gennemsnitshastigheden ud fra hastigheds-grafen. I så fald skal vi vælge statistik fra Undersøg data-menuen, dvs.



4: Undersøg data ▶ 5: Statistik ▶ 2: run1.hastighed

Vi får da tegnet minimum, gennemsnittet og maksimum ind på hastigheds-grafen. Vi får også vist en oplysningsboks om de statistiske nøgletal:



Det svarer altså til en gennemsnitshastighed på -0.51 m/s (hvilket netop er gennemsnittet af de 26 hastighedsmålinger)

5. Beregninger

Det ville selvfølgelig være nærliggende at udregne gennemsnitshastigheden ud fra den samlede tilbagelagte distance divideret med det samlede tidsrum. DataQuest-værkstedet rummer imidlertid ingen beregningsfaciliteter, så denne udregning må i stedet foretages i et Beregnings-værksted. Man kan da fx hente tallene i fx tabelvisningen:

	Tid	Placering	Hast	Acc
1	0.05	1.617	0.08	0.86
2	0.10	1.619	0.12	0.69
3	0.15	1.629	0.15	0.17
4	0.20	1.634	0.17	-1.54
5	0.25	1.649	0.02	-3.49
6	0.30	1.641	-0.26	-2.33
7	0.35	1.615	-0.25	0.16
8	0.40	1.615	-0.17	0.17
9	0.45	1.602	-0.23	-0.11
10	0.50	1.588	-0.21	0.51
11	0.55	1.574	-0.16	0.43
12	0.60	1.562	-0.16	-0.35
13	0.65	1.562	-0.16	-2.31
14	0.70	1.565	-0.41	-3.28
15	0.75	1.519	-0.57	-1.27
16	0.80	1.502	-0.50	0.06
17	0.85	1.473	-0.53	0.04
18	0.90	1.446	-0.52	0.53
19	0.95	1.421	-0.47	0.70
20	1.00	1.398	-0.42	-0.39
21	1.05	1.382	-0.51	-1.59
22	1.10	1.348	-0.63	-0.93
23	1.15	1.316	-0.69	0.60
24	1.20	1.289	-0.53	-0.90
25	1.25	1.265	-0.53	-0.64
26	1.30	1.234	-0.61	-1.21
27	1.35	1.203	-0.67	-0.51
28	1.40	1.165	-0.66	0.30
29	1.45	1.136	-0.63	0.65
30	1.50	1.102	-0.60	0.86
31	1.55	1.075	-0.53	0.58
32	1.60	1.051	-0.53	0.07
33	1.65	1.022	-0.55	0.29
34	1.70	0.995	-0.51	0.78
35	1.75	0.971	-0.46	0.99
36	1.80	0.949	-0.41	1.30
37	1.85	0.928	-0.33	1.75
38	1.90	0.915	-0.23	1.87
39	1.95	0.906	-0.14	1.55
40	2.00	0.901	-0.07	1.11
41	2.05	0.899	-0.03	0.74
42	2.10	0.899	-0.00	0.47
43	2.15	0.899	0.02	0.30
44	2.20	0.900	0.03	0.11
45	2.25	0.902	0.03	-0.00
46	2.30	0.903	0.02	0.02

$$\frac{0.915 - 1.562}{1.9 - 0.65} = -0.5176$$

Denne gang finder vi altså en gennemsnitshastighed på -0.52 m/s!

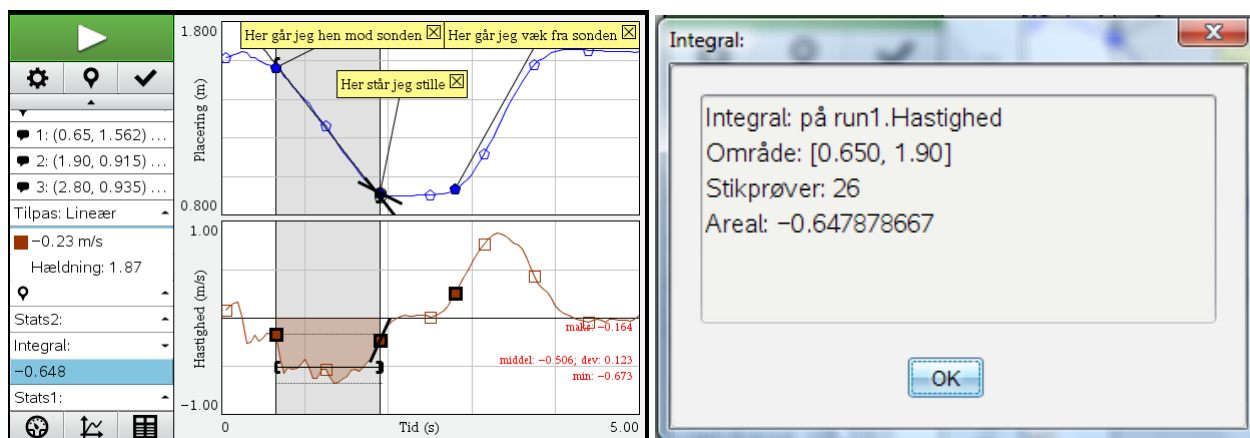
Da de forskellige metoder giver forskellige resultater er det nærliggende at angive gennemsnitshastigheden med en vis usikkerhed ☺

6. Integral

Som den sidste metode bruger vi integralet til at udregne gennemsnitshastigheden, hvilket er en forholdsvis avanceret teknik ☺. Men den giver anledning til at demonstrere, hvordan DataQuest-værkstedet håndterer integraler af punktgrafer.

 4: Undersøg data ▶ 4:Integral ▶ 2:run1.hastighed

Som ventet svæertes arealet til og værdien af arealet tilføjet til oplysningspanelet, ligesom arealet også fremgår af en oplysningsboks. Læg mærke til at arealet er negativt ☺. Det er altså reelt integralet vi finder på denne måde.



Gennemsnitsværdien, dvs. gennemsnitshøjden, findes da ved at dividere med grundlinjen, dvs. med tidsrummet. Men det må igen gøres i et Beregningsværksted ☺

$\frac{0.915-1.562}{1.9-0.65}$	-0.5176
$\frac{-0.64788}{1.9-0.65}$	-0.518304

Det giver næsten det samme som før! Den gennemsnitlige hastighed over tidsrummet fra 0.65 sekunder til 1.90 sekunder er altså -0.518 m/s.

Gå langs en graf

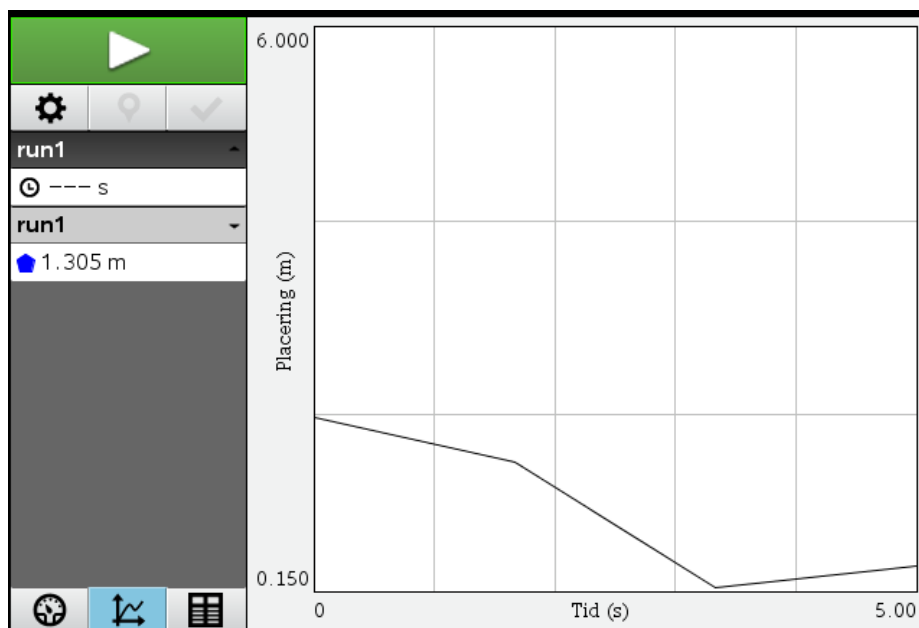
Vi slutter gennemgangen af DataQuest-værkstedet med at pege på et instruktivt og fornøjeligt interaktivt eksperiment man kan selv kan udføre med en Go! Motion sensor.

Vælg først et Nyt eksperiment fra Eksperiment-menuen for at rydde arbejdsområdet. Sørg for at du befinder dig i graf-visningen!

Vælg dernæst menupunktet

 4: Undersøg data ▶ A:Gå langs en graf ▶ 2:Ny tid-sted graf

Programmet vælger da en *tilfældig* stykvis lineær tid-sted-graf baseret på tre linjestykker, som du skal forsøge at simulere ved at gå foran bevægelsessonden ☺. Det kan fx se således ud:



Start med at forstå grafen:

1. Den vandrette akse er tidsaksen, som går fra 0 til 5 sekunder: Spadserturen foran sonden varer altså 5 sekunder.
2. Den lodrette akse er sted-aksen der rækker fra en afstand på 1.5 meter til en afstand på 6 meter.
3. Du begynder i en afstand af 3 meter og bevæger dig hen mod sonden – først langsomt, så hurtigere.
4. Du når en afstand til sonden på 1.5 meter efter 3.33 sekunder. Derefter vender du bevægelsen og går langsomt væk fra sonden ...

Tryk derefter på start-kanppen og begynd at gå. Det er sjovest, hvis computerskærm-billedet kastes op på et lærred, så man tydeligt kan se i hvor høj grad dit bevægelses-mønster følger den foreslåede graf ☺

Hvis du synes denne øvelse bliver for nem, kan du skærpe øvelsen betydeligt ved i stedet at forsøge at gå langs en tid-hastighedsgraf ved i stedet at vælge



4: Undersøg data ▶ A:Gå langs en graf ▶ 3:Ny tid-hastighed graf

God fornøjelse ☺